



الرياضيات للعلوم الإدارية



د. سعيد أحمد حسن

Mathematics in Bussines Administration

رقم المقرر: 928002

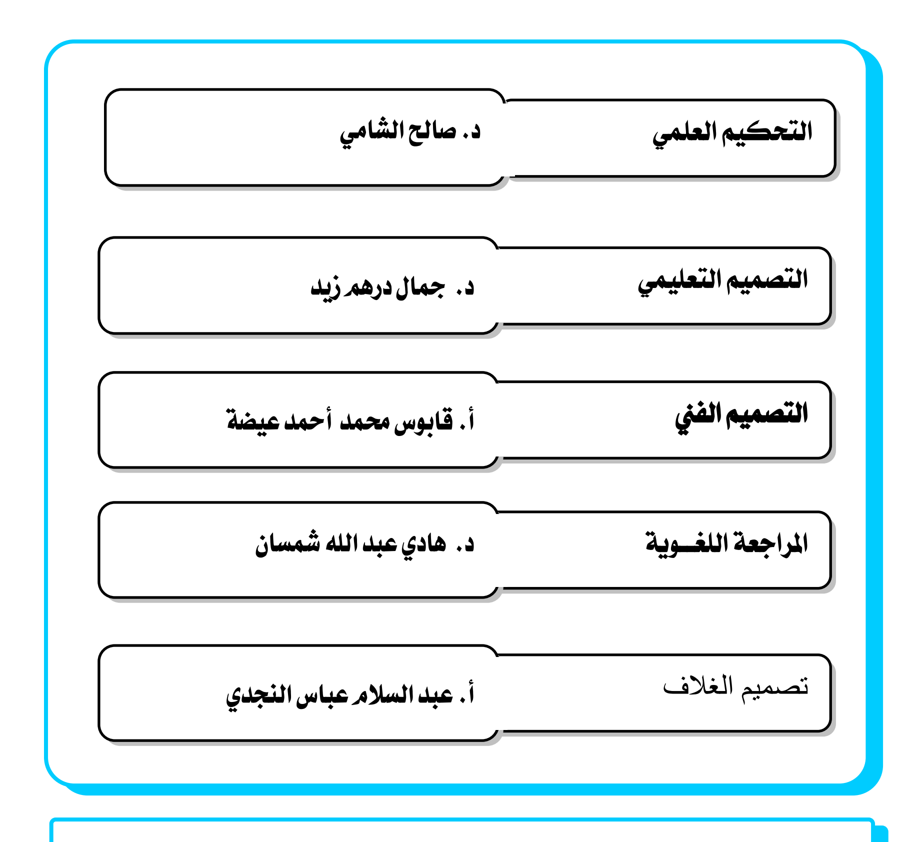
2012م 1433هـ



الرياضيات للعلوم الإدارية

د/ سعيد أحمد حسن

صنعاء
2012م – 1433هـ



الإشـراف العـام : قسـم إنتـاج المقررات – كـليـة التـعلـيم المفـتوح

الطبعة الثالثة 2012م/ 1433هـ

يطلب هذا الكتاب مباشرة من الجامعة www.ust.edu

ت/373237/ 00967 تحويلة 6121

أو من دار الكتاب الجامعي – صنعاء – ت/1471790/00967

E-mail : Dalkitab@yemen.net.ye

رقم الإيداع (543 ـ 2009)

مقدمة المقرر

عزيزي الدارس، مرحبا بك إلى هذا المقرر:

تُعد الرياضيات الركيزة الأساسية التي تعتمد عليها العلوم المختلفة ولا سيما الإنسانية-مثل علم الإدارة والمحاسبة والاقتصاد، حيث تستخدم كأدوات وأساليب رياضية لتطوير هذه العلوم وتحقيق أهدافها وترشيد قراراتها.

ويعد الأسلوب الكمي-وهو رياضي- أداة الدارس والباحث في دراسة وقياس وتحليل العديد من المشكلات، في المحاسبة وإدارة الإنتاج، والتسويق، ودراسة الجدوى للمشروعات، والتخطيط الاقتصادي على المستوى القطاعي والدولة. كما أن أدوات التحليل الكمي الأخرى كالإحصاء، وبحوث العمليات ونظم المعلومات اعتمدت على الرياضيات في صياغة قوانينها لتصبح علوماً متميزة.

من أجل ذلك كان لابد أن تحتل الرياضيات والأساليب الكمية دوراً مهماً في المجالات الاقتصادية والاجتماعية المختلفة. ولكن تباين مستويات الباحثين والدارسين في هذه المجالات فضلاً عن تباين احتياجاتهم إلى تلك الأساليب، وأن ما يقدم لهم من أساليب رياضية ليس هدفاً في حد ذاته ولكنه وسيلة لفهم أعمق وأدق للموضوعات في الإدارة والمحاسبة والاقتصاد، لذلك كله كان اختيار الموضوعات التي يحتويها هذا المقرر وأسلوب العرض الذي يركز على الأساسيات والتطبيق أكثر من اللجوء إلى التجريد الذي قد يباعد بين الدارس والباحث وبين تلك الأساليب.

وتتمثل أهمية هذا المقرر من أهمية الدور الذي تلعبه الرياضيات، التي تعد الركيزة الأساسية التي تعتمد عليها الكثير من العلوم الطبيعية والإنسانية.

ونظراً لأن الدراسة الحديثة في كليات العلوم الإدارية تتطلب أن يلم الطالب بالقدر الملائم من الأساليب الرياضية حتى يمكن تهيئة قدراته لدراسة المقررات المختلفة في كافة المجالات الإدارية والمحاسبية، فإن تقديم هذا المقرر روعي عند اختيار مفرداته أن تلائم حاجة طالب كليات العلوم الإدارية.

وختاماً أسأل الله أن أكون قد وفقت في تقديم محتويات هذا المقرر بصورة ميسرة تفيد الدارسين والباحثين بمختلف تخصصاتهم.

عزيزي الدارس، يهدف هذا المقرر إلى تعريفك بالأساليب الرياضية المختلفة ومدى استخدامها في الحياة العملية، وتتعرف فيه على الأسس، واللوغاريتمات، والتباديل والتوافيق، ونظرية ذات الحدين، والمحددات، والمصفوفات، وحل المعادلات الجبرية، والعلاقات والدوال، والنهايات والاتصال، والتفاضل، وتطبيقات التفاضل بالإضافة إلى التكامل.

الأهداف العامة:

يتوقع منك- **عزيزي الدارس**- أن تكون قادراً على أن:

1- تستوعب بعض المفاهيم الرياضية.

2- تصوغ المشاكل الاقتصادية والاجتماعية والتعبير عنها في أسلوب رياضي.

3- تسهم في تكوين بعض الاتجاهات الرياضية السليمة وتنميتها.

4- تستخدم الأساليب الرياضية لتحليل العلوم الاقتصادية والإدارية.

5- تستوعب القواعد النظرية والأساليب الرياضية المستخدمة في الحياة العملية.

6- تكتسب المهارات الأساسية للتعامل مع النماذج الرياضية.

7- تنمي القدرة على الابتكار.

8- تعرف التفكير الاستدلالي في الرياضيات.

9-تتعرف على أهم تطبيقات الرياضيات في الحياة العملية.

وقد تم تصميم هذا المقرر لتحقيق الأهداف السابقة، وهو يتألف من اثنتي عشرة وحدة دراسية، تشتمل على عرض ومناقشة تفصيلية لكافة الجوانب الأساسية المرتبطة بدراسة المقرر. وقد اشتمل هذا المقرر على الوحدات الآتية:

الوحدة الأولى: (الأسس): وقد تناولت تعريفاً للأسس، الأسس الصحيحة الموجبة والسالبة، واستخدام الأسس في تبسيط المقادير الجبرية، وحل المعادلات الآسية.

الوحدة الثانية: (اللوغاريتمات): وقد تناولت مدى أهمية اللوغاريتمات، والمعادلة اللوغاريتمية، وقوانين اللوغاريتمات واللوغاريتمات العشرية.

الوحدة الثالثة: (التباديل والتوافيق): وقد تناولت مقدمة عامة عن التباديل والتوافيق، وتعريف التباديل، وقوانين التباديل، وتعريف التوافيق، وقوانين التوافيق والعلاقة بين التباديل والتوافيق.

الوحدة الرابعة: (نظرية ذات الحدين): وقد تناولت هذه الوحدة مفهوم نظرية ذات الحدين، والحد العام في مفكوك النظرية، وإيجاد معامل x^n في مفكوك ذات الحدين وإيجاد الحد الخالي من x في مفكوك ذات الحدين.

الوحدة الخامسة: (المحددات): وقد تناولت مقدمة عامة عن المحددات، وتعريف المحدد، ورتبة المحدد، وإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثانية والثالثة، واستخدام قاعدة ساروس لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة بالإضافة إلى خواص المحددات.

الوحدة السادسة: (المصفوفات): وقد تناولت هذه الوحدة مقدمة عامة عن المصفوفات، وتعريف المصفوفة، و رتبتها، وأنواع المصفوفات، والعمليات الجبرية على المصفوفات بالإضافة إلى إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة الثانية والثالثة.

الوحدة السابعة: (المعادلات الجبرية): وقد تناولت مقدمة عامة عن مدى أهمية المعادلات الجبرية، والمعادلات الخطية، وحل المعادلات الخطية، ومعادلة الدرجة الثانية، وحل معادلة الدرجة الثانية واستخدام المحددات والمصفوفات في حل المعادلات الخطية.

الوحدة الثامنة: (العلاقات والدوال): وقد تناولت مقدمة عامة عن العلاقات والدوال، وتعريف العلاقة، وأنواع العلاقات، والدوال وتعريفها وأنواع الدوال.

الوحدة التاسعة: (النهايات والاتصال): وقد تناولت مقدمة لمدى أهمية النهايات، وتعريف النهايات، وحالات عدم التعيين، وقوانين النهايات، وحساب نهاية دالة عند قيمة معينة، ونهاية الدالة عند اللانهاية، والاتصال وتعريف الاتصال.

الوحدة العاشرة: (التفاضل): وقد تناولت التفاضل، وتعريف معامل التفاضل الأول، وقوانين التفاضل، والمشتقة الأولى للدالة والمشتقات من رتب أعلى.

الوحدة الحادية عشرة: (النهايات العظمى والصغرى): وقد تناولت النهايات العظمى والصغرى للدالة، وتزايد وتناقص الدالة، وتحديد منحنى الدالة ونقط الانقلاب بالإضافة إلى بعض التطبيقات الاقتصادية للتفاضل.

الوحدة الثانية عشرة: (التكامل): وقد تناولت مقدمة عن مدى أهمية التكامل وتعريف للتكامل، بالإضافة إلى التكامل المحدود والعلاقة الرياضية المستخدمة لحساب هذا النوع من التكامل.

ويحتوي المقرر على العديد من الأمثلة ومجموعة من التدريبات المحلولة في نهاية كل وحدة دراسية، بالإضافة إلى أسئلة التقويم الذاتي والتعيينات تتيح للدارس الفرصة للتدريب على محتويات كل وحدة دراسية.

مصادر التعلم:

المرجع الرئيسي للمقرر هو كتاب مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، د. سعيد أحمد حسن.

عزيزي الدارس، ولمزيد من المعلومات والاستفادة في هذا المجال يمكنك الرجوع إلى المراجع الآتية:

1. أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
2. الجاسر، إبراهيم عبدالله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، مكتبة الملك فهد الوطنية للنشر، الرياض: المملكة العربية السعودية
3. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
4. الوحيشي، جمال أحمد وآخرون (2010)، الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة ، منشورات مركز الأمين ، صنعاء ، الجمهورية اليمنية.
5. حسن، سعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركز الأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
6. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود ، الرياض: المملكة العربية السعودية.
7. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود ، الرياض: المملكة العربية السعودية.

محتوى المقرر


1
الوحدة الأولى
الأسس

محتويات الوحدة

1. المقدمة:

1.1. تمهيد :

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة؛

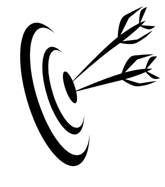
تتألف هذه الوحدة (الأسس) من خمسة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسمان الأولان بمادة تمهيدية، وخلفية عامة لبعض العمليات الجبرية بالإضافة إلى تعريف الأسس، أما الأقسام الثلاثة الأخرى (خواص الأس، والأسس الصحيحة الموجبة والسالبة، واستخدام الأسس في حل المعادلات الأسية) فهي مكرسة لتأكيد أهمية الأسس في تبسيط العمليات الحسابية.

وتساعدك الوحدة الأولى - عزيزي الدارس- على فهم الأسس وخواصها. وقد حرصنا في الوقت نفسه على أن تقدم لك مادة تعليمية تشتمل على أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

2.1. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية الأولى وهي بعنوان " الأسس " والذي يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تتعرّف على الأسس.
2. تتعرّف على خواص الأسس.
3. تميز بين الأساسات المتشابهة وغير المتشابهة.
4. تميز بين الأسس الصحيحة الموجبة والسالبة.
5. تميز بين الأسس الصحيحة والكسرية.
6. تتعرّف على تبسيط العمليات الحسابية.
7. تذكر العلاقة الرياضية لحل المعادلات الآسية.



3.1. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من خمسة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الثاني بالهدف الأول، الذي يركز على تعريف الأسس.

و القسم الثاني تناولنا فيه تعريف الأسس الصحيحة الموجبة والسالبة، والصور العامة لقوانين الأسس، وهذا يحقق الهدف الثاني والثالث والرابع من أهداف الوحدة.

وبينا في القسم الثالث الصورة العامة للأسس الكسرية الموجبة والسالبة، وهذا يحقق الهدف الخامس. أما في القسم الرابع فقد تم التركيز على استخدام الأسس في تبسيط المقادير الجبرية، وبهذا تحقق الهدف السادس.

وتناولنا في القسم الخامس استخدام الأسس في حل المعادلات الأسية، وهذا يحقق الهدف السابع.

4.1. القراءات المساعدة:

تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، آملٍ عزيزي الدارس أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.



1. باروم، احمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة، المملكة العربية السعودية.
2. .الوحيشي، جمال أحمد (2010): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء، الجمهورية اليمنية.
3. حسن، سعيد احمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء، الجمهورية اليمنية.
3. مصطفى، احمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض، المملكة العربية السعودية.

5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، تأكد من تهيئتك المكان الملائم للدراسة، وأن يكون لديك دفتر وقلم.
وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى دراسة التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية

2. مراجعة لبعض العمليات الجبرية:

1.2. الأسس واستخداماتها:

تستخدم الأسس في تبسيط العلميات الحسابية التي تُجرى على المقادير الجبرية، بالإضافة إلى حل بعض المعادلات.

2.2. تعريف الأسس:

إذا كان لدينا المقدار:

$$2\times 2 \times 2 \times 2$$

فإنه يمكن كتابته في صورة مختصرة هي:

$$2^4$$

وتقرأ: 2 أس 4 أو 2 مرفوعة للقوة 4، حيث يطلق على العدد "2" الأساس والعدد " 4 " الأس أو القوة. وعلى ذلك فإن الأس هو: القوة التي يرُفع إليها الأساس.
وبصفة عامة إذا كان لدينا عدد حقيقي (X) مضروباً في نفسه عدد (n) من المرات، فإنه يمكن التعبير عن ذلك في صورة مختصرة كما يأتي:

$$X \times X \times X \times ... \times X_n = X^n$$

حيث:

X : عبارة عن الأساس.

n : عدد صحيح موجب .

وسنتناول في هذا البند الأسس الصحيحة والكسرية الموجبة والسالبة:

3.2. الأسس الصحيحة:

1.3.2. الأسس الصحيحة الموجبة:



$$X^n \times X^m \times ... \times X^L = X^{(n+m+L)}$$

ومعنى هذه الخاصية: في حالة إجراء عمليات الضرب على المقادير الجبرية المتشابة الأساسات، فإن حاصل عمليات الضرب تساوي أساساً واحداً منها ثم تُجمع الأسس التي رُفعت إليها الأساسات.

مثال1:

أوجد الناتج النهائي للمقادير الآتية :

(a) $2^2 \times 2^3$ (b) $3^3 \times 3^2$ (C) $X^4 \times X^2$

الحل:

(a) $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
$= 32$

(b) $3^3 \times 3^2 = 3^{3+2} = 3^5$
$= 243$ □

(C) $X^4 \times X^2 = X^{4+2}$
$= X^6$

إرشادات الحل:
يلاحظ أن: الأساسات متشابهه، وبالتالي تم جمع الأسس.

- يلاحظ في المثال السابق أن الأساسات متشابه في كل من (a , b , C)، وبالتالي فقد تم أخذ أساس واحدٍ في كل منها ثم جُمعت الأسس التي رفعت إليها تلك الأساسات.



تدريب (1)

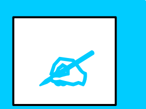
اوجد الناتج النهائي للمقادير الآتية:

(a) $X^{a} \times X^{m}$ (b) $2^{2} \times 3^{3}$ (c) $2^{3} \times 2^{5}$ (d) $4^{3} \times 4^{0}$

2

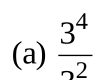
$$\frac{X^{n}}{X^{m}} = X^{n-m}$$

معنى هذه الخاصية: في حالة إجراء عمليات القسمة إذا اتحدت الأساسات فإنه يتم أخذ أساس واحدٍ منها ثم نطرح الأسس في المقام من الأسس في البسط.



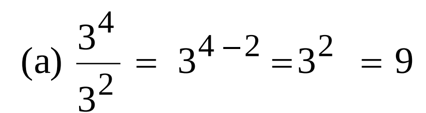
مثال 2:

أوجد الناتج النهائي للمقادير الآتية :



(a) $\frac{3^{4}}{3^{2}}$ (b) $\frac{Y^{6}}{Y^{3}}$ (C) $\frac{10X^{4} \times Y^{3}}{2X^{3} \times Y^{2}}$

☐ الحل:



(a) $\frac{3^{4}}{3^{2}} = 3^{4-2} = 3^{2} = 9$

(b) $\frac{Y^{6}}{Y^{3}} = Y^{6-3} = Y^{3}$

(C) $\frac{10X^{4} \times Y^{3}}{2X^{3} \times Y^{2}} = 5X^{4-3} \times Y^{3-2}$ ☐

$= 5X \times Y = 5XY$

إرشادات الحل:

يلاحظ في هذا المثال أن: الأساسات في كل من البسط والمقام متشابهة، وبالتالي تم طرح الأس في المقام من الأس في البسط.

نتيجة هامة:

$$X^0 = 1$$

أي أساس أسه صفر ، فإن قيمته =1

أمثلة توضيحية:

$4^0 \times Y^0 = 1$

$n^0 \times X^0 \times Y$

$1 \times 1 \times Y = Y$

ومعنى هذه النتيجة أن: أي حد أو مقدار جبري أو عدد حقيقي مرفوع إلى (القوة) صفر ، فإن: قيمته = 1

تدريب (2)

اوجد الناتج النهائي للمقادير الآتية:

(a) $\frac{9^4}{9^2}$ (b) $\frac{Y^5}{Y^3}$ (C) $4^0 \times 3^0$

3

$$(X^n)^m = X^{(n \times m)}$$

ومعنى هذه الخاصية: إذا كانت (X^n) مرفوعة إلى قوة أخرى ولتكن (m)،
فإن المقدار الناتج هو عبارة عن الأساس مرفوعاً لحاصل ضرب القوتين $(n \times m)$،
حيث يتم ضرب الأس الداخلي في الأس الخارجي.



مثال3:

أوجد الناتج النهائي للمقادير الآتية:

(a) $(Y^2)^3$ (b) $(2X^3)^2$

الحل:

إرشادات الحل:
يلاحظ أنه:
تم إزالة القوس وضرب الأس الداخلي في الأس الخارجي.

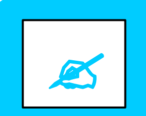
(a) $(Y^2)^3 = Y^{(2\times3)}$
$= Y^6$

(b) $(2X^3)^2 = 2^2 \times X^{(3\times2)}$
$= 4X^6$



$$(X \times Y \times \ldots \times Z)^n = X^n \times Y^n \times \ldots \times Z^n$$

وتوضح هذه الخاصية أن: ناتج ضرب مقدارين أو أكثر مرفوعين/ مرفوعة إلى القوة ولتكن (n) يساوي حاصل ضرب تلك المقادير مرفوعة لتلك القوة، بمعنى أن أس القوس هو أس لجميع العوامل المضروبة داخل القوس (قانون التوزيع).



مثال4:

أوجد قيمة الناتج النهائي للمقادير الآتية :

(a) $(X\times Y)^3$ (b) $(3X\times Y)^2$ (C) $(2X^2\times Y\times Z^2)^2$

الحل:

إرشادات الحل:
يلاحظ في هذا المثال أنه: تم توزيع أس القوس على جميع العوامل المضروبة، تطبيقا للخاصية.

(a) $(X \times Y)^3 = X^3 \times Y^3$
$= X^3Y^3$

(b) $(3X\times Y)^2 = 3^2 \times X^2 \times Y^2$
$= 9X^2Y^2$

(C) $(2X^2\times Y\times Z^3)^2 = 2^2 \times X^{(2\times2)} \times Y^2 \times Z^{(3\times2)}$
$= 4X^4Y^2Z^6$

5

$$\left[\frac{X\times\ldots\times Z}{Y\times\ldots\times m}\right]^n=\frac{X^n\times\ldots\times Z^n}{Y^n\times\ldots\times m^n}\quad ,(Y,m)\neq 0$$

وتبين هذه الخاصية أنه: في حالة القسمة إذا اختلفت الأساسات وكان القوس مرفوعاً للقوة (n)، فإن أس القوس هو أس لجميع العوامل المقسومة.

مثال5:

أوجد قيمة الناتج النهائي للمقادير الآتية:

(a) $\left[\frac{X\times Y}{Z\times m}\right]^3$ (b) $\left[\frac{10X^3}{2X^2\times Y^3}\right]^2$

إرشادات الحل: يلاحظ أنه: تم توزيع أس القوس على العوامل المضروبة والمقسومة داخل القوس.

الحل:

(a) $\left[\frac{X\times Y}{Z\times m}\right]^3=\frac{X^3Y^3}{Z^3m^3}$

(b) $\left[\frac{10X^3}{5X^2\times Y^3}\right]^2=\frac{10^2X^{(3\times2)}}{5^2X^{(2\times2)}\times Y^{(3\times2)}}$ □

$$=\frac{100X^6}{25X^4Y^6}=\frac{4X^2}{Y^6}$$

تدريب (3)



أوجد الناتج النهائي للمقادير الآتية:

(a) $(2X^2\times Y^3)^3$ (b) $\left[\frac{10X^4\times Y^2}{2X^2}\right]^2$ (C) $\frac{9X^5\times Y^6}{3X^3\times Y^4}$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

اوجد الناتج النهائي للمقادير الآتية:

(a) $(2Y^2)^3$ (b) $(3X^2)^{-2}$ (C) $\left(\frac{6}{4}\right)^2$

(d) $\left(\frac{9X^2Y}{3X}\right)^{-2}$ (e) $\left(\frac{4a^3}{2a}\right)^3$

?

2.3.2. الأسس الصحيحة السالبة:

في هذا البند -عزيزي الدارس- سوف نتناول الحالة التي يكون فيها الأس سالباً.

تعريف:

$$X^{-n} = \frac{1}{X^n}$$

يلاحظ في هذه العلاقة أنه: تم تحويل المقدار من البسط إلى المقام وتغيير إشارة الأس من (-) إلى (+).

ويمكن القول أن جميع قوانين وقواعد الأسس الموجبة التي تناولناها سابقاً صالحة للتطبيق في حالة القوة السالبة. والجدول الآتي يبين ذلك.

$X^{-n} \times X^{-m} = X^{-n+(-m)}$
$\frac{X^{-n}}{X^{-m}} = X^{m-n}$
$(X^{-n})^{-m} = X^{(-n\times -m)} = X^{n\times m}$ □
$(X \times Y)^{-n} = X^{-n}\ Y^{-n}$
$(X^{-n} \times Y^{-m})^{-L} = X^{n\times L} \times Y^{m\times L}$ □
$\left[\frac{X}{Y}\right]^{-n} = \frac{X^{-n}}{Y^{-n}} = \frac{Y^n}{X^n}$ □

3.3:2. الأسس الكسرية

تناولنا في البنود السابقة الأسس الصحيحة الموجبة والسالبة. وفي هذا البند عزيزي الدارس، سوف نتناول الأسس الكسرية الموجبة والسالبة.

❖الصورة العامة للأسس الكسرية:

$$X^{p/q}$$

يلاحظ من خلال الصورة السابقة أن قوة الأساس (X) عبارة عن كسر، ويمكن كتابتها تلك في صورة أخرى مكافئة لها هي: $\sqrt[q]{X^P}$ ، بمعنى أنه يمكن كتابة الصورة الأسية في صورة جذر، حيث دليل الجذر فيها عبارة عن مقام أس الكسر والبسط أس للمقدار.

مثال6:

أوجد قيمة المقادير الآتية :

(a)$8^{2/3}$ (b)$16^{1/4}$ (C)$125^{2/3}$ (d)$16^{3/2}$ □

الحل:

$$(a)8^{2/3} = (2^3)^{2/3} = 2^{3\times 2/3} = 2^2 = 4$$

$$(b)16^{1/4} = (2^4)^{1/4} = 2^{4\times 1/4} = 2$$

□

إرشادات الحل:

1.يتم تحليل الأساس.

2.يتم إزالة الأقواس.

3.يتم ضرب الأس الداخلي في الأس الخارجي.

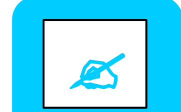
$$(c)\ 125^{2/3} = (5^3)^{2/3}$$
$$= 5^{3\times 2/3}$$
$$= 5^2 = 25$$

$$(d)\ 16^{3/2} = (2^4)^{3/2}$$
$$= 2^{4\times 3/2}$$
$$= 2^6 = 64$$

وتعميماً للعلاقة السابقة فإن الجذر النوني لـ " X " يُعرف كما يأتي:

$$\sqrt[n]{X} = X^{1/n}$$

يلاحظ انه تم تحويل صورة الجذر إلى صورة آسية مقام الأس فيها عبارة عن دليل الجذر.



مثال7:

أوجد قيمة المقادير الآتية :

(a) $\sqrt[5]{32}$ (b) $\sqrt[3]{27}$ (c) $\sqrt{X^4}$ (d) $\sqrt[6]{X}$

الحل:

$$(a)\ \sqrt[5]{32} = (32)^{1/5}$$
$$= (2^5)^{1/5}$$
$$= 2^{5\times 1/5} = 2$$
$$(b)\ \sqrt[3]{27} = (27)^{1/3}$$
$$= (3^3)^{1/3}$$
$$= 3^{3\times 1/3} = 3$$

إرشادات الحل:

في مثل هذه التمارين وتبسيطاً للحل:

1. يتم تحويل الصورة الجذرية إلى صورة أسية.

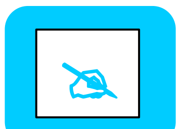
2. يتم تحليل الأساس.

3. يتم إزالة الأقواس، وضرب الأس الداخلي في الأس الخارجي.

$$(d)\ \sqrt[6]{X} = X^{1/6}$$

$$(C)\ \sqrt{X^4} = (X^4)^{1/2}$$

$$= X^{4\times 1/2} = X^2$$



مثال8:

أوجد قيمة المقادير الآتية :

$(a)\ 8^{-2/3}$ $(b)\ 125^{-2/3}$ $(C)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ $(d)\ \left(\frac{5}{7}\right)^{-1}$

الحل:

إرشادات الحل:

1.يتم تحليل الأساس.

2.يتم إزالة الأقواس، وضرب الأس الداخلي في الأس الخارجي.

3.يتم كتابة المقدار في صورة بسط ومقام مع تغيير إشارة أس المقدار.

$$(a)\ 8^{-2/3} = (2^3)^{-2/3}$$

$$= 2^{3\times(-2/3)}$$

$$= 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

إرشادات الحل:

1.يتم إزالة القوس، وتوزيع الأس على المقدار في البسط والمقام.

2.تم إبدال المقدارين في البسط والمقام مع تغيير إشارة الأس.

$$(b)\ 125^{-2/3} = (5^3)^{-2/3}$$

$$= 5^{3\times(-2/3)}$$

$$= 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

$$(c)\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{2^{-4}}{3^{-4}} = \frac{3^4}{2^4}$$

$$= \frac{81}{16}$$

$$(d)\ \left(\frac{5}{7}\right)^{-1} = \frac{5^{-1}}{7^{-1}} = \left(\frac{7}{5}\right)^{1}$$

$$= \frac{7}{5}$$

4.3.2. استخدام الأسس في تبسيط المقادير الجبرية:

عندما تحتوي العمليات الحسابية على عمليات ضرب وقسمة يمكن تبسيطها باستخدام خواص الأسس وذلك باتباع الخطوات الآتية :

- تحليل الأساسات إلى عوامل أولية.
- دمج الأساسات المتشابهة لكل مقدار على حدة في أساس واحد بتطبيق الخواص السابقة.
- اختصار الناتج ووضعه في أبسط صورة.



مثال9:

اختصر لأبسط صورة:

(a) $\dfrac{125^2 \times 16^3 \times 2^3}{20^4 \times 8^4}$ (b) $\dfrac{6^{4n} \times 5^{7n}}{15^{4n} \times 10^{3n}}$

□

□الحـــل:

(a) $\dfrac{125^2 \times 16^3 \times 2^3}{20^4 \times 8^4}$

$$\frac{(5^3)^2 \times (2^4)^3 \times 2^3}{(2^2 \times 5)^4 \times (2^3)^4}$$

$$= \frac{5^6 \times 2^{12} \times 2^3}{2^8 \times 5^4 \times 2^{12}}$$

$$= 5^{6-4} \times 2^{12+3-8-12}$$

$$= 5^2 \times 2^{-5}$$

$$= \frac{5^2}{2^5} = \frac{25}{32}$$

إرشادات الحل:

1. يتم تحليل الأساسات إلــى عوامل أولية.
2. تم إزالـــة الأقـــواس، وضـرب الأس الـداخلي في الأس الخارجي.
3. دمـــج الأساســـات المتشـابهة لكـل مقـدار على حدة في أساس واحد بتطبيق الخواص السابقة.
4. اختصار الناتج ووضعه في أبسط صورة.

$$(b)\frac{6^{4n}\times 5^{7n}}{15^{4n}\times 10^{3n}}=\frac{(2\times 3)^{4n}\times (5^{7n})}{(3\times 5)^{4n}\times (2\times 5)^{3n}}$$

$$=\frac{2^{4n}\times 3^{4n}\times 5^{7n}}{3^{4n}\times 5^{4n}\times 2^{3n}\times 5^{3n}}$$



$$=2^{4n-3n}\times 3^{4n-4n}\times 5^{7n-4n-3n}$$

$$=2^{n}\times 3^{0}\times 5^{0}$$

$$=2^{n}\times 1\times 1$$

$$=2^{n}$$

5.3.2. استخدام الأسس في حل المعادلات الأسية:

يمكن استخدام الأسس في حل المعادلات الأسية والتي تأخذ الصورة العامة الآتية:

$$a^{X}=C \qquad (1)$$

حيث:

كل من: C , a أعداد حقيقية تختلف عن الصفر.

ويقصد بحل المعادلات الأسية هو إيجاد قيمة المجهول " X ". والمبدأ الأساسي في حل مثل هذه المعادلات هو محاولة وضع " C " في صورة أسية بحيث يكون الأساس هو أيضاً " a "، بمعنى يتم وضع " C " في صورة $C=a^{m}$ مثلاً.

وبناءً عليه فإن المعادلة الأسية في العلاقة "1" تأخذ الصورة الآتية:

$$a^{X}=a^{m} \qquad (2)$$

وحيث أن الأساسين في طرفي العلاقة "2" متساويان يكون حل المعادلة الأسية هو: $X=m$ ، أي أنه إذا تساوى الأساسان في الطرفين يتساوى الأسان وبالعكس إذا تساوى الأسان يتساوى الأساسان.

وفيما يأتي أمثلة على حل المعادلة الأسية:

مثال10:

أوجد قيمة (X) التي تحقق كل من المعادلات الآتية :

$(a)\ 2^{X+5} = 8$ $(b)\ 3^{X-2} = 9$

$(C)\ \left(\frac{3}{5}\right)^{2X-1} = \frac{27}{125}$ $(d)\ (25)^{X} = (125)^{2X-4}$

الحل:

$$(a)\ \because 2^{X+5} = 8$$

$$\therefore 2^{X+5} = 2^{3}$$

$$\therefore X + 5 = 3$$

$$X = 3 - 5$$

$$\therefore X = -2$$

$$(b)\ \because 3^{X-2} = 9$$

$$\therefore 3^{X-2} = 3^{2}$$

$$\therefore X - 2 = 2$$

$$\therefore X = 2 + 2 \quad \therefore X = 4$$

إرشادات الحل:

يتم تحليل الأساس للطرف الأيمن.

∵ الأساسات متساوية

∴ الأسس متساوية.

$$(C)\ \because \left(\frac{3}{5}\right)^{2X-1} = \frac{27}{125}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{5}\right)^{2X-1} = \frac{3^{3}}{5^{3}}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{5}\right)^{2X-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{3}$$

$$\therefore 2X - 1 = 3$$

$$\therefore 2X = 3 + 1$$

$$\therefore 2X = 4 \quad \therefore X = 2$$

الوحدة الأولى

الأسس

$$(d) \because (25)^{X} = (125)^{2X-4}$$
$$\therefore (5^2)^{X} = (5^3)^{2X-4}$$

$$\therefore 5^{2X} = 5^{6X-12}$$
$$\therefore 2X = 6X - 12$$
$$\therefore 6X - 2X = 12$$
$$\therefore 4X = 12$$
$$\therefore X = 3$$

يلاحظ أن الأساسات في الطرفين تحتاج إلى تحليل كما يأتي:
نفك الأقواس ونضرب الأس الداخلي في الأس الخارجي.
$\because$ الأساسات متساوية.
$\therefore$ الأسس متساوية.

تدريب (4)

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(a) $3^{X+2} = 81$ (b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3-X} = \frac{81}{16}$ (C) $5^{X-1} \times 7^{1-X} = \frac{25}{49}$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

1- أوجد الناتج النهائي للمقادير:

(a) $\sqrt[3n]{27^{n}} \times 3^{-1}$ (b) $\frac{27^{n+1} \times 16^{n} \times 9^{3n}}{16^{n+1} \times 27^{3n}}$

2- أوجد قيمة (X) التي تحقق المعادلة:

(C) $\sqrt[5]{X^3} = \frac{1}{27}$

3. الخلاصة:

تناولت هذه الوحدة مراجعة عامة لبعض العمليات الجبرية، حيث ركزت على تعريف الأسس وخواصها واستخدامها في تبسيط العمليات الحسابية من ضرب وقسمة.

وقد بينا أنواع الأسس المختلفة، الصحيحة الموجبة والسالبة، بالإضافة إلى الأسس الكسرية. كما تناولت الوحدة أسلوب حل المعادلات الأسية.

واشتملت الوحدة أيضاً على تدريبات متنوعة تغطي جميع المفردات التي تناولناها بالإضافة إلى أسئلة التقويم الذاتي.

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الثانية:

عزيزي الدارس، من خلال دراستنا للوحدة الأولى التي ذكرنا فيها أن الأسس تساعدنا في تبسيط العلميات الحسابية وتمكنا من كتابة العلاقة الرياضية بين الرقمين 3 , 81 في الصورة: $3^4 = 81$ والتي تعطي دلالة على أن العدد 3 مضروباً في نفسه 4 مرات، وعليه فإن الدالة الأسية ذات علاقة وثيقة بالدالة اللوغاريتمية. ففي العلاقة السابقة نُعرف الأس 4 بأنه لوغاريتم العدد 81 للأساس 3.

وفي الأسس كنا نبحث عن المقدار " X " الذي أساسه " a "، أما في اللوغاريتمات فإن البحث ينصب عن أس المقدار، وهذا الأس يطلق علية لوغاريتم المقدار.

5. إجابات التدريبات:

تدريب (1):

∵الأساسات متشابهة. ∴ يتم جمع الأسس.

(a) $X^a \times X^m = X^{a+m}$

(b) $2^2 \times 3^3 = 4 \times 27$ □

$= 108$

(c) $2^3 \times 2^5 = 2^8$ □

(d) $4^3 \times 4^0 = 4^3$

تدريب (2):

∵ الأساسات متشابهة. ∴ يتم طرح قوة المقام من قوة البسط.

(a) $\frac{9^4}{9^2} = 9^{4-2} = 9^2$

$= 81$

(b) $\frac{Y^5}{Y^3} = Y^{5-3} = Y^2$

❖ يتم تطبيق النتيجة.

(C) $4^0 \times 3^0 = 1 \times 1 = 1$□

تدريب (3):

❖ أس القوس هو أس لجميع العوامل المضروبة، وبالتالي فإنه يتم إزالة القوس وضرب الأس الداخلي في الأس الخارجي كما يأتي:

(a) $(2\ X^2 \times Y^3)^3 = 2^3\ X^{(2\times3)} \times Y^{(3\times3)}$

$= 8X^6\ Y^9$

❖ يتم إجراء القسمة للإعداد الصحيحة أولاً ثم نطرح قوة المقام من قوة البسط للأساسات المتشابهة.

❖ أس القوس هو أس لجميع العوامل المضروبة، وبالتالي فإنه يتم إزالة القوس وضُرب الأس الداخلي في الأس الخارجي كما يأتي:

$$(b)\ \left[\frac{10X^4 \times Y^2}{2X^2}\right]^2 = \left[5X^{4-2} \times Y^2\right]^2$$

$$= \left[5X^2 \times Y^2\right]^2 \quad \square$$

$$= 5^2 X^{(2\times2)} \times Y^{(2\times2)}$$

$$= 25X^4 Y^4$$

$$(C)\ \frac{9X^5 \times Y^6}{3X^3 \times Y^4} = 3X^{5-3} \times Y^{6-4} \quad \square$$

$$= 3X^2Y^2$$

تدريب (4):

❖ يتم تحليل الأساس للطرف الأيمن:

$$(a) \because 3^{X+2} = 81 \qquad \therefore 3^{X+2} = 3^4 \quad \square$$

$\because$ الأساسات متساوية. $\therefore$ الأسس متساوية:

$$\therefore X + 2 = 4$$

$$X = 4 - 2 \quad \square$$

$$\therefore X = 2$$

❖ يتم تحليل الأساس للطرف الأيمن:

$$(b) \because \left(\frac{2}{3}\right)^{3-X} = \frac{81}{16} \qquad \therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{3-X} = \frac{3^4}{2^4}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{3-X} = \frac{2^{-4}}{3^{-4}}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{3-X} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

$\because$ الأساسات متساوية. $\therefore$ الأسس متساوية:

$$\therefore 3 - X = -4 \qquad \therefore -X = -3 - 4 \rightarrow \quad -X = -7$$

$$\therefore X = 7$$

❖ يتم إعادة كتابة الطرف الأيسر من التمرين كما يأتي:

$$(C) \because 5^{X-1} \times 7^{1-X} = \frac{25}{49} \qquad \therefore \frac{5^{X-1}}{7^{X-1}} = \frac{5^2}{7^2}$$

$$\therefore \left(\frac{5}{7}\right)^{X-1} = \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

$\because$ الأساسات متساوية. $\therefore$ الأسس متساوية.

$$\therefore X - 1 = 2$$

$$\therefore X = 3$$

6- المراجع:

.المراجع العربية:

1. إسماعيل، حبيب على (2001) أساسيات في الرياضيات، منشورات مركز الأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
2. النعيمي، قاسم محمد (2001) مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها. الطبعة الأولى، منشورات مركز الأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
3. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة الطبعة الخامسة،دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
4. الوحيشي، جمال أحمد (2010) الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة،منشورات مركزا لأمين، صنعاء، الجمهورية اليمنية.
5. حسن، سعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
6. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

.المراجع الأجنبية:

1 – Frank Ayres,Jr,(1971) Theory And Problems, McGrawHill : New YorK

2 – Seymour, Lipschutz (1983) Finite Mathematics, McGraw Hill : New Your*k*

7- التعيينات:

السؤال الأول:

أوجد الناتج النهائي للمقادير الآتية:

(a) $\dfrac{(25)^n \times (32)^n}{(10)^{4n} \times (15)^n}$ (b) $X^{n-1} \times X$ (C) $\dfrac{12X^6Y^3}{3X^2Y}$

(d) $\dfrac{X^2 \times Y^3}{X^{-1} \times Y^2}$

السؤال الثاني:

أوجد قيمة (X) التي تحقق كلاً من المعادلات الآتية:

(a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{X+5} = \left(3\dfrac{3}{8}\right)^{-2}$ (b) $X^{3/4} = 27$

السؤال الثالث:

أوجد قيمة المقادير الآتية:

(a) $81^{-3/4}$ (b) $\sqrt[5]{32}$ (C) $(2X^3 \times Y^2)^3$


2
الوحدة الثانية
اللوغاريتمات

محتويات الوحدة

1. المقدمـــــــة:

1.1. تمهيد:

عزيزي الدارس،

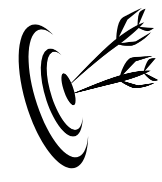
مرحباً بك إلى الوحدة الثانية التي تتناول؛ (اللوغاريتمات) وتتألف من أربعة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بتعريف اللوغاريتمات، وخلفية عامة.

ويتناول القسم الثاني قوانين وخواص اللوغاريتمات متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن -عزيزي الدارس- من استيعاب تلك القوانين واستخدامها في الحياة العملية.

ويُركز القسم الثالث على حل المعادلات اللوغاريتمية (إيجاد عناصر المعادلة اللوغاريتمية). ويتناول القسم الرابع اللوغاريتمات العشرية.

وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب اللوغاريتمية وخواصها. وحرصنا في الوقت نفسه على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل على أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

2.1. أهداف الوحدة:



عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية الثانية وهي بعنوان " اللوغاريتمات " والذي يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تُعرّف اللوغاريتمات.
2. تميز بين قوانين اللوغاريتمات المختلفة.
3. تُعرّف اللوغاريتمات التي أساسها مختلف عن العشرة.
4. تُعرّف اللوغاريتمات للأساس عشرة.
5. تشرح أهمية اللوغاريتمات في تبسيط العمليات الحسابية.

3.1. أقسام الوحدة:

عزيـزي الـدارس، ألفـت انتباهـك إلى أن هـذه الوحـدة تتكـون مـن أربعـة أقسام رئيسة أعدت لكـي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث أرتبط القسـم الأول منهـا (تعريـف اللوغاريتمـات) بالهـدف الأول، والـذي يركـز علـى مفهوم اللوغاريتمات وخلفية عامة.

ويتناول القسم الثاني قوانين وخواص اللوغاريتميات.

4.1. القراءات المساعدة:

تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هـذه الوحـدة، آمـل -عزيـزي الـدارس- أن تسـاعدك في المزيـد مـن التعمـق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.



1.مصـطفى، احمـد فتحـي وآخـرون . (2002): مقدمـة في الرياضيات للعلـوم الإداريـة، الطبعـة الأولى،منشـورات جامعـة الملـك سـعود، الريـاض: المملكـة العربية السعودية.

2.بـاروم، أحمـد محمـد وآخـرون (1988): الرياضـيات في الاقتصـاد والإدارة الطبعـة الخامسـة، دار الشـروق للنشـر والتوزيـع، جـدة: المملكـة العربيـة السعودية.

3.الوحيشي، جمال أحمد (2010): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.

5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:



عزيزي الدارس، لكـي تحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة والتقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضح عليها أجزاء من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة تأكد بأنك هيأت المكان الملائم للدراسة ولديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. اللوغاريتمات Logarithms

1.2. أهمية اللوغاريتمات:

تعد اللوغاريتمات وسيلة تساعد في إجراء كثير من العمليات الحسابية المعقدة. فبدلاً من ضرب الأرقام الكبيرة نستعيض عن ذلك بعمليات الجمع وهي أبسط وأيسر من عمليات الضرب، وبدلاً من إجراء عمليات القسمة يمكننا أن نستخدم عمليات الطرح وهي أبسط من عمليات القسمة.

2.2. المعادلة اللوغاريتمية:

عندما يكون لدينا عددان "على سبيل المثال" : 16 , 4 فإنه يمكن كتابة العلاقة بينهما كما يأتي: $4^2 = 16$

ونُعرّف الأس 2 بأنه لوغاريتم العدد 16 للأساس 4. والمتساوية: $4^2 = 16$ يمكن وضعها في صورة أخرى مكافئة لها هي:

$$\text{Log}_4\ 16 = 2$$

وتقرأ العلاقة السابقة، لوغاريتم العدد 16 للأساس 4 يساوي 2، وبذلك نجد أن:

العلاقة:

$$\text{Log}_4\ 16 = 2$$

تكافئ العلاقة:

$$4^2 = 16$$

وهكذا نجد أن كل صورة آسية أساسها عدد حقيقي موجب $\neq 1$ يوجد لها صورة أخرى تكافئها تسمى بالصورة اللوغاريتمية.

ملاحظات هامة:

(1)
مجال الدالة اللوغاريتمية عبارة عن جميع الأعداد الحقيقية الموجبة "R^{+}".

(2)
مدى الدالة اللوغاريتمية يساوي مجالها المقابل R حيث: R: تمثل الأعداد الحقيقية.

فمثلاً:

(a) $\text{Log}_2\ 32 = 5 \Leftrightarrow 32 = 2^5$,

(b) $\text{Log}_3\ 81 = 4 \Leftrightarrow 81 = 3^4$,

(C) $\text{Log}_{10}\ 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$,

(d) $\text{Log}_3\ \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}$,

(e) $\text{Log}_5\ 1 = 0 \Leftrightarrow 5^0 = 1$

يلاحظ من خلال الأمثلة السابقة أنه يمكن التعبير عن العلاقة التي تربط الطرف الأيسر بالطرف الأيمن من خلال العلاقتين:

$$\text{Log}_a\ X = y\ ,\ X = a^y$$

ويقال في هذه الحالة أنهما صورتان متكافئتان، بمعنى أن الصورة الأسية يمكن كتابتها في صورة لوغاريتمية مكافئة لها والعكس. وبذلك نجد أن المعادلة اللوغاريتمية تتكون من ثلاثة عناصر، إذا علم اثنين منها نستطيع إيجاد العنصر الثالث.

تأمل الأمثلة التالية:

لوغاريتم الأعداد السالبة الآتية ليس لها معنى:

(a) $\text{Log}_3 -9$, (b) $\text{Log}_2\ -8$, ...□

لوغاريتم $\text{Log}_a\ X$ قد يكون عدداً موجباً أو سالباً أو صفراً.

فمثلاً:

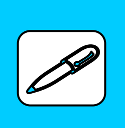
(a) $\text{Log}_2\ 8 = 3$, (b) $\text{Log}_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -2$,

(C) $\text{Log}_5\ 1 = 0$

اللوغاريتمات التالية ليس لها معنى.

(a) $\text{Log}_{-2}\ 8$, (b) $\text{Log}_0\ 6$, (C) $\text{Log}_1\ 5$ □

بمعنى أن أساس اللوغاريتم (a) يجب أن يختلف عن ($\pm 1, -, 0$)



تدريب (1)

1- اكتب الصورة الأسية المكافئة للصور اللوغاريتمية الآتية:

(a) $\log_2 128 = 7$, (b) $\log_8 16\sqrt{2} = \frac{3}{2}$

(C) $\log_{100} 10 = \frac{1}{2}$

2- اكتب الصورة اللوغاريتمية للصور الأسية الآتية:

(a) $2^8 = 256$, (b) $\frac{1}{9} = 3^{-2}$

أسئلة التقويم الذاتي(1)

اكتب الصورة اللوغاريتمية المقابلة للصور الأسية الآتية:

(a) $2^{-3} = 8$ (b) $3^{5/2} = 9\sqrt{3}$ (C) $243 = (\sqrt{3})^{10}$

(d) $10^{-2} = 0.01$

3.2. إيجاد عناصر المعادلة اللوغاريتمية:

بينا سابقاً أن المعادلة اللوغاريتمية: $\log_a X = y$ تتكون من ثلاثة عناصر هي:

(X , a , y)، فإذا علم اثنان منها فإنه يمكن إيجاد قيمة العنصر الثالث.

مثال1:

أوجد قيمة (y) في كل من العلاقات الآتية:

(a) $\log_2 4 = y$, (b) $\log_4 \left(\frac{1}{16}\right) = y$,

(C) $\log_2 64 = y$



الحـــــل:

إرشادات الحل: (a)

1- يتم كتابة الصورة اللوغاريتيمية في صورة أسية.

2- يتم تحليل العدد 4

3- الأساس في الطرف الأيسر يساوي الأساس في الطرف الأيمن.

∴ الأس يساوي الأس.

(a) $\text{Log}_2\ 4 = y$

$\because X = a^y$

$\therefore 4 = 2^y$

$\therefore 2^2 = 2^y \qquad \therefore y = 2$

(b)

يلاحظ أن العدد المطلوب إيجاد اللوغاريتم له عبارة عن عدد كسري، وبالتالي نتوقع أن لوغاريتم العدد يكون عدداً سالباً. وبناءً عليه يتم تحليل العدد: $\frac{1}{16}$

- يتم نقل العدد من المقام إلى البسط وتغيير إشارة الأس.
- يتم إزالة القوس وضرب القوة الداخلية في القوة الخارجية: y

∵ الأساس في الطرف الأيسر يساوي الأساس في الطرف الأيمن.

∴ الأس يساوي الأس.

(b) $\text{Log}_4 \left(\frac{1}{16}\right) = y$

$\because X = a^y$

$\therefore \frac{1}{16} = 4^y$

$\therefore \frac{1}{2^4} = 4^y$

$\therefore 2^{-4} = (2^2)^y$

$\therefore 2^{-4} = 2^{2y}$

$\therefore 2y = -4 \qquad \therefore y = \frac{-4}{2}$

$\therefore y = -2$

(C)

1- يتم كتابة الصورة اللوغاريتيمية في صورة أسية.

2- يتم تحليل العدد 64

3- الأساس في الطرف الأيسر يساوي الأساس في الطرف الأيمن.

∴ الأس يساوي الأس.

(C) $\text{Log}_2\ 64 = y$

$\because X = a^y$

$\therefore 64 = 2^y$

$\therefore 2^6 = 2^y \qquad \therefore y = 6$



مثال2:

أوجد قيمة العدد (X) في كل من العلاقات الآتية:

(a) $Log_2\ X = 2$ (b) $Log_4\ X = -2$ (C) $Log_3\ X = 4$

الحـل:

(a) $Log_2\ X = 2$

$\because X = a^y$

$\therefore X = 2^2 \qquad \rightarrow X = 4$

(b) $Log_4\ X = -2$

$\because X = a^y$

$\therefore X = 4^{-2} \qquad \rightarrow X = \frac{1}{4^2}$

$\therefore X = \frac{1}{16}$

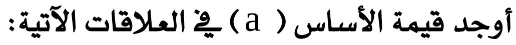
(C) $Log_3\ X = 4$

$\because X = a^y$

$\therefore X = 3^4 \qquad \rightarrow X = 81$



مثال3:



أوجد قيمة الأساس (a) في العلاقات الآتية:

(a) $Log_a\ 49 = 2$ (b) $Log_a\ 8 = 3$ (C) $Log_a\ 0.001 = -3$

الحـل:

(a) $Log_a\ 49 = 2$

$\because X = a^y$

$\therefore 49 = a^2$

$\therefore 7^2 = a^2 \qquad \rightarrow a = 7$

(b) $\mathrm{Log}_a 8 = 3$

$\because X = a^y$

$\therefore 8 = a^3$

$\therefore 2^3 = a^3 \qquad \rightarrow a = 2$

(C) $\mathrm{Log}_a\ 0.001 = -3$

$\because X = a^y$

$\therefore 0.001 = a^{-3}$

$\therefore \frac{1}{1000} = a^{-3}$

$\therefore \frac{1}{10^3} = a^{-3}$

$\therefore 10^{-3} = a^{-3} \rightarrow a = 10$ □

تدريب (2)

أوجد قيم مجاهيل المعادلات اللوغاريتمية الآتية:

(a) $\mathrm{Log}_a\ 8 = 6$, (b) $\mathrm{Log}_9\ 81\sqrt{3} = y$

(C) $\mathrm{Log}_5\ X = 3$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

أوجد قيمة كل مما يأتي:

(a) $\mathrm{Log}_2 \frac{1}{2}$, (b) $\mathrm{Log}_4\ 8$, (C) $\mathrm{Log}_{10}\ 0.001$

(d) $\mathrm{Log}_2 \frac{1}{32}$

4.2. قوانين اللوغاريتمات:

القانون الأول:

$$\text{Log}_a\ (A \times B \times C \times \ldots) = \text{Log}_a\ A + \text{Log}_a\ B + \text{Log}_a\ C + \ldots$$

ومعنى هذا القانون أنه:

في حالة إيجاد لوغاريتم حاصل ضرب مقدارين أو أكثر يساوي مجموع لوغاريتمات الأعداد المضروبة.

فمثلاً:

(a) $\text{Log}_3\ (2 \times 7) = \text{Log}_3\ 2 + \text{Log}_3\ 7$

(b) $\text{Log}_4\ 35 = \text{Log}_4\ (5 \times 7)$

$= \text{Log}_4\ 5 + \text{Log}_4\ 7$ □

القانون الثاني:

$$\text{Log}_a\ \left(\frac{A}{B}\right) = \text{Log}_a\ A - \text{Log}_a\ B$$

ومعنى هذا القانون أنه:

في حالة إيجاد لوغاريتم خارج القسمة نطرح لوغاريتم المقام من لوغاريتم البسط.

فمثلاً:

(a) $\text{Log}_3\ (\frac{2}{7}) = \text{Log}_3\ 2 - \text{Log}_3\ 7$ □

(b) $\text{Log}_2\ \left(1\frac{1}{4}\right) = \text{Log}_2\ (\frac{5}{4})$

$= \text{Log}_2\ 5 - \text{Log}_2\ 4$

وبالعكس فإن:

(C) $\text{Log}_5\ 11 - \text{Log}_5\ 2 = \text{Log}_5\ (\frac{11}{2})$ □

القانون الثالث:

$$\log_a X^n = n \log_a X$$

معنى هذا القانون أن:

لوغاريتم عدد مرفوع لقوة (ما) يساوي حاصل ضرب تلك القوة في لوغاريتم العدد.

فمثلاً:

(a) $\log_5 3^n = n \log_5 3$

(b) $\log_7 32 = \log_7 2^5$

$= 5 \log_7 2$

(C) $\log_2 \sqrt{5} = \log_2 (5)^{1/2}$ □

$= \frac{1}{2} \log_2 5$

وبالعكس فإن:

$2 \log_3 15 = \log_3 (15)^2$ □

$= \log_3 225$

القانون الرابع:

$$\log_a a = 1$$

معنى هذا القانون أن:

لوغاريتم أي عدد حقيقي موجب لأساس مساو لذلك العدد = 1

فمثلاً:

(a) $\log_5 5 = 1$, (b) $\log_7 7 = 1$, (C) $\log_3 3 = 1$ □

القانون الخامس:

$$\log_a 1 = 0$$

أي أن:

لوغاريتم العدد (1) لأساس معين يساوي صفراً.

فمثلاً:

$(a)\ \text{Log}_5\ 1 = 0 \quad , (b)\ \text{Log}_9\ 1 = 0 \quad , (C)\ \text{Log}_4\ 1 = 0$

5.2. اللوغاريتمات العشرية:

تسمى اللوغاريتمات التي أساسها يساوي 10 باللوغاريتمات العشرية أو المعتادة. وإذا لم يذكر أساس اللوغاريتم، فإننا نعتبر الأساس في هذه الحالة عشرة، ويكون اللوغاريتم عبارة عن لوغاريتم عشري.

تأمل الأمثلة الآتية:

المجموعة الأولى:

(a) $1 = 10^0$

$\therefore \text{Log}_{10}\ 1 = 0$

(b) $10 = 10^1$

$\therefore \text{Log}_{10}\ 10 = 1$

(C) $100 = 10^2$

$\therefore \text{Log}_{10}\ 100 = 2$

(d) $1000 = 10^3$

$\therefore \text{Log}_{10}\ 1000 = 3$

المجموعة الثانية:

(a) $0.1 = \frac{1}{10}$

$= 10^{-1} \qquad \therefore \text{Log}_{10}\ 0.1 = -1$

(b) $0.01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$= 10^{-2} \qquad \therefore \text{Log}_{10}\ 0.01 = -2$

(C) $0.0001 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}$

$= 10^{-4} \qquad \therefore \text{Log}_{10}\ 0.0001 = -4$

يلاحظ من خلال أمثلة المجموعة الأولى أنه تم تحويل العدد: 10 ومضاعفاته إلى الأس عشرة مرفوعاً إلى أس (قوة) معينة، وهذه القوة يلاحظ أنها موجبة وهي عبارة عن لوغاريتم العدد. أما بالنسبة لأمثلة المجموعة الثانية فيلاحظ أنه تم تحويل العدد الكسري إلى العدد عشرة ومكرراته المتناقصة مرفوعة إلى أس (قوة) معينة، هذه القوة سالبة وهي عبارة عن لوغاريتم العدد.

أمثلة عامة:

1- إذا كان:

$\text{Log } 2 = 0.3010 \quad , \quad \text{Log } 3 = 0.4771 \quad , \quad \text{Log } 7 = 0.8451$

فأوجد قيمة:

$\text{Log } 21$

الحـــــل:

$$\text{Log } 21 = \text{Log }(3 \times 7) = \text{Log } 3 + \text{Log } 7$$
$$= 0.4771 + 0.8451$$
$$= 1.3222$$
$$\therefore \text{Log } 21 = 1.3222$$

إرشادات الحل:

يلاحظ أنه:

1- لم يكتب أساس اللوغاريتم، وبالتالي فإن الأساس في هذه الحالة = 10

2- تم كتابة العدد 21 في شكل حاصل ضرب، ومن ثم تحويلها إلى حاصل جمع وفقاً للقانون الأول.

2- أوجد قيمة كل مما يأتي:

(a) $\text{Log } \frac{1}{2} + \text{Log } 2$

☐ الحـــــل:

$$\text{Log } \frac{1}{2} + \text{Log } 2 = \text{Log } \left(\frac{1}{2} \times 2\right)$$
$$= \text{Log } 1 \quad \therefore \text{Log } 1 = 0$$

☐

☐

$$\therefore \text{Log } \frac{1}{2} + \text{Log } 2 = 0$$

(b) $\text{Log } 12.5 + \text{Log } 8$

☐ الحـــــل:

$$\text{Log } 12.5 + \text{Log } 8 = \text{Log }(12.5 \times 8)$$
$$= \text{Log } 100 = \text{Log } 10^2$$
$$= 2 \text{ Log } 10$$
$$= 2 \times 1$$
$$= 2$$

$$\therefore \text{Log } 12.5 + \text{Log } 8 = 2$$

(C) $\text{Log}_2 34 - \text{Log}_2 17$

□الحـــــل:

$$\text{Log}_2\ 34 - \text{Log}_2\ 17 = \text{Log}_2\left(\frac{34}{17}\right)$$
$$= \text{Log}_2\ 2$$
$$= 1$$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

(d) $\dfrac{\text{Log}_5\ 125 + \text{Log}_5\ 5}{\text{Log}_5\ 125 - \text{Log}_5\ 125}$

الحـــــل:

$$= \frac{\text{Log}_5\ 5^3 + \text{Log}_5\ 5}{\text{Log}_5\ 5^3 - \text{Log}_5\ 5^3}$$
$$= \frac{3\ \text{Log}_5\ 5 + \text{Log}_5\ 5}{3\ \text{Log}_5\ 5 + 3\ \text{Log}_5\ 5} = \frac{3\times 1 + 1}{3\times 1 + 3\times 1} = \frac{4}{6}$$

أوجد قيمة كل مما يأتي:

(e) $\text{Log}\ 64 - \text{Log}\ 6 - \text{Log}\ 8 + \text{Log}\ \frac{3}{4}$

$$= \text{Log}\left(\frac{64\times\frac{3}{4}}{6\times 8}\right) = \text{Log}\ \frac{16\times 3}{6\times 8}$$
$$= \text{Log}\left(\frac{48}{48}\right)$$
$$= \text{Log}\ 1 = 0$$

3- أوجد قيمة المجاهيل الآتية (y , x , a):

(a) $\text{Log}_9\ 27 = y$ (b) $\text{Log}_3 X = 4$ (C) $\text{Log}_a \frac{1}{16} = -4$□

□الحـــــل:

(a) $\because \text{Log}_9\ 27 = y$,

$\because X = a^y$

$\therefore 27 = 9^y \rightarrow 3^3 = (3^2)^y$

$\therefore 3^3 = 3^{2y}$

$\therefore 2y = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}$

(b) $\because \text{Log}_3 X = 4$,

$\because X = a^y$

$\therefore X = 3^4 \rightarrow \therefore X = 81$

(C) $\because \text{Log}_a \frac{1}{16} = -4$,

$\because X = a^y$

$\therefore \frac{1}{16} = a^{-4} \rightarrow 2^{-4} = a^{-4} \quad \therefore a = 2$

تدريب (3)

اوجد قيمة العلاقات اللوغاريتمية الآتية:

(a) $\text{Log} \frac{18 \times 5}{9}$, (b) $\text{Log } 2 + \text{Log } 5$

(C) $\text{Log} \frac{1}{10}$, (d) $\text{Log} \frac{1}{100}$

أسئلة التقويم الذاتي(3)

أوجد قيمة المجاهيل في العلاقات اللوغاريتمية الآتية:

(a) $\text{Log}_2 \frac{1}{2} = y$, (b) $\text{Log}_2 \sqrt[3]{4} = y$

(C) $\text{Log}_5 X = 2$, (d) $\text{Log}_a 27 = \frac{3}{2}$

3. الخلاصة:

تناولت هذه الوحدة مفهوم اللوغاريتمات، حيث ركزت على أهمية اللوغاريتمات في تبسيط العمليات الحسابية الكبيرة. وبينت الوحدة أن عملية الضرب تتحول إلى عملية جمع وعملية القسمة تتحول إلى عملية طرح.

وقد بينا العلاقة بين المعادلة الآسية والمعادلة اللوغارتمية، وأشرنا إلى أن المعادلة الآسية لها صورة أخرى مكافئة لها هي الصورة اللوغارتمية. كما بينا أيضاً كيفية إيجاد عناصر المعادلة اللوغارتمية إذا علم اثنان من عناصرها.

واستعرضت الوحدة بالشرح والتحليل قوانين وقواعد اللوغاريتمات المختلفة، وتم إعطاء أمثلة توضيحية بعد كل قانون من تلك القوانين ليكتسب الدارس من خلالها المهارة لحل المسائل التي قد يواجهها في الحياة العملية.

وبينا أيضاً في هذه الوحدة الفرق بين اللوغاريتمات التي أساسها يختلف عن العشرة واللوغاريتمات التي أساسها عشرة.

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الثالثة:

عزيزي الدارس، سبق وأن ركزت الوحدة الثانية على المفاهيم الأساسية لأسلوب اللوغاريتمات للتعامل مع الأرقام الكبيرة، إلا أن الأمر يتطلب منا في كثير من المواقف العملية معرفة عدد الطرق التي يمكن بواسطتها اختيار مجموعة من العناصر، هذا ما سوف نتناوله في الوحدة الدراسية الثالثة " التباديل والتوافيق"، حيث تعتبر التباديل والتوافيق من طرائق العد اللازمة لدراسة مواضيع رياضية متعددة مثل نظرية ذات الحدين ونظرية الاحتمالات التي تعتبر أساساً للدراسات الإحصائية.

5. إجابات التدريبات:

تدريب (1):

(1):

(a) $\because X = a^y \quad \therefore 128 = 2^7$ (b) $\because X = a^y \quad \therefore 16\sqrt{2} = (8)^{3/2}$

(C) $\because X = a^y \quad \therefore 10 = (100)^{1/2}$

(2):

(a) $2^8 = 256$ (b) $\frac{1}{9} = 3^{-3}$

(a) $\because 2^8 = 256 \quad \therefore \text{Log}_2\ 256 = 8$

(b) $\because \frac{1}{9} = 3^{-3} \quad \therefore \text{Log}_6\ \frac{1}{9} = -2$ □

تدريب (2):

(a) $\because \text{Log}_a\ 8 = 6 \rightarrow 8 = a^6$

$\therefore 2^3 = a^6 \rightarrow (2^3)^{1/6} = (a)^{6 \times 1/6}$

$\therefore 2^{1/2} = a \quad \therefore a = \sqrt{2}$

(b) $\because \text{Log}_9\ 81\sqrt{3} = y \quad \therefore 81\sqrt{3} = 9^y$

$\therefore 3^4 \times 3^{1/2} = (3^2)^y \rightarrow 3^{9/2} = 3^{2y}$

$\therefore 2y = \frac{9}{2}$

$\therefore y = \frac{9}{4}$

(C) $\because \text{Log}_5\ X = 3 \quad \therefore X = 3^5 \rightarrow X = 125$ □

تدريب (3):

(a) $\text{Log } \frac{18 \times 5}{9} = \text{Log } 10$

$=1$,

(b) $\text{Log } 2 + \text{Log } 5 = \text{Log } (2 \times 5)$

$= \text{Log } 10 = 1$,

(C) $\text{Log } \frac{1}{10} = \text{Log } 10^{-1}$

$\therefore \text{Log } 10^{-1} = -1$,

(d) $\text{Log } \frac{1}{100} = \text{Log } 10^{-2}$

$\therefore \text{Log } 10^{-2} = -2$

6. المراجع:

1. المراجع العربية:

1.إسماعيل، حبيب على (2001) أساسيات في الرياضيات، منشورات مركز الأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.

2. الجاسر، إبراهيم عبد اللّه (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الاجتماعية والإدارية. الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود-كلية العلوم الإدارية، الرياض: المملكة العربية السعودية.

3.النعيمي، قاسم محمد (2001) مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها. الطبعة الأولى، منشورات مركز الأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.

4.باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.

5.الوحيشي جمال أحمد ، الرياضيات في العلوم الإدارية ، الطبعة الرابعة ، (2006)، منشورات مركز الأمين ، صنعاء: الجمهورية اليمنية.

6.حسن سعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.

7.مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

2. المراجع الأجنبية

1 – Frank Ayres,Jr, (1971) Theory And Problems , McGraw Hill : New YorK

2 – Seymour, Lipschutz (1983) Finite Mathematics, McGraw Hill : New Yourk

□

7. التعيينات:

السؤال الأول:

أوجد قيمة كل من:

(a) $\text{Log}_4 \; 4\sqrt{2}$ (b) $\text{Log}_2 \; \sqrt[3]{4}$

□

(C) $\text{Log}_{\sqrt{3}} \; \frac{1}{27} = y$ (d) $\text{Log} \; 0.001$

السؤال الثاني:

أوجد قيمة كل من:

(a) $\text{Log}_3 \; 9\sqrt{3}$ (b) $\text{Log}_a \; 8\sqrt{2} = \frac{7}{2}$

(C) $\text{Log}_3 X = -3$ (d) $\text{Log}_6 \; 1$

السؤال الثالث:

أوجد قيمة كل من:

(a) $\text{Log}_{10} \; 10000$ (b) $\text{Log}_7 \; 7$

(c) $\text{Log}_{10} \; 0.01 = X + 3$

السؤال الرابع:

إذا كان:

$\text{Log}_a \; 2 = x \quad , \quad \text{Log}_a \; 3 = y \quad , \quad \text{Log}_a \; 5 = z$

فأوجد بدلالة $(x \; , \; y \; , \; z)$ **كلاً من:**

(a) $\text{Log}_a \; 18$ (b) $\text{Log}_a \; \sqrt{30}$

الوحدة الثالثة 3

التباديل والتوافيق

محتويات الوحدة

1. المقدمــــــة:

1.1. تمهيد :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى هذه الوحدة؛

تتألف هذه الوحدة (التباديل والتوافيق) من ثلاثة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بمفهوم مبدأ العد، وخلفية عامة عن أهميته.

ويتناول القسم الثاني التباديل، حيث سوف نركز فيه على مفهوم التباديل وخواصها متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن عزيزي الدارس من استيعاب تلك القوانين واستخدامها في الحالات التطبيقية.

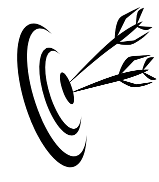
ويُركز القسم الثالث على التوافيق. وسوف نتناول فيه بالشرح والتحليل مفهوم التوافيق، وخواصها، والفرق بينها وبين التباديل.

وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب مبدأ العد وخواصها. وحرصنا في الوقت نفسه على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية وتكتسب من خلالها المهارة والقدرة على التعامل مع التمارين التي قد تواجهك في الحياة العملية.

2.1. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية الثالثة وهي بعنوان " التباديل والتوافيق " والذي يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تعرف مفهوم مبدأ العد.
2. تعرف مفهوم التباديل.
3. تحسب عدد الطرق التي يمكن بواسطتها اختيار مجموعة من العناصر مع مراعاة الترتيب.
4. تعرف مفهوم التوافيق.
5. تميز بين التباديل والتوافيق.
6. تحسب عدد الحالات الممكنة لإجراء عملية حسابية معينة بغض النظر عن الترتيب.



3.1 . أقسام الوحدة:

عزيـزي الـدارس، ألفـت انتباهـك إلى أن هـذه الوحـدة تتكـون مـن أربعـة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الأول منها بمفهوم العد وأهميته وهذا يحقق الهدف الأول.

وارتبط القسم الثاني منهـا بمفهـوم التبـديل وخواصـها، وأسـلوب حسـاب عدد الطرق الممكنة لحدوث حدث ما مع مراعـاة الترتيـب، ويتحقـق هـذا مـن خلال الهدفين الثاني والثالث.

وفي القسم الثـالـث سـوف تتعـرف علـى مفهـوم التوافيـق والفـرق بينهـا وبـين التباديل، بالإضـافة إلى معرفـة كيفيـة حسـاب عـدد الطـرق الممكنـة لحـدوث حدث معين بغض النظر عن الترتيب. ويحقق ذلك الهدف الخامس.

4.1 . القراءات المساعدة:



تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هـذه الوحدة، آمـل -عزيـزي الـدارس- أن تسـاعدك في المزيد مـن التعمـق في مفـردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.

1. بـاروم، أحمـد محمـد وآخـرون (1988): الرياضـيات في الاقتصـاد والإدارة الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
2. الوحيشي، جمال أحمد، (2006) الرياضيات في العلوم الإدارية ، الطبعة الرابعة ، منشورات مركز الأمين، صنعاء .
3. حسن، سعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
4. مصـطفى، أحمـد فتحـي وآخـرون . (2002): مقدمـة في الرياضـيات للعلـوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالاتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريب التي وردت في هذه الوحدة والتقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضح عليها أجزاء من المادة التعليمة.

6.1 . ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلى التأكد بأنك هيأت المكان الملائم للدراسة ولديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2.التباديل والتوافيق Permutation & Combination

تعد نظرية مبدأ العد من أهم النظريات الرياضية وذلك لأنها تمهد السبيل إلى إيجاد عدد النواتج الممكنة لتجربة عشوائية أو عدد النواتج المواتية لترتيب معين لتلك التجربة-دون حاجة إلى الحصر المباشر لحصر لتلك النواتج-تمهيداً لتقدير احتمالات تحققها خاصة وأن نظرية الاحتمالات تعتمد أساساً على تكرار التجربة العشوائية لعدد كبير من المرات، الأمر الذي يجعل عملية الحصر والعد المباشر بالغة الصعوبة ويكون البديل المناسب هو مبدأ العد الذي يرتبط بقواعد التباديل والتوافيق.

و تدخل التوافيق في تحديد معاملات ذات الحدين وفي تركيب التوزيع الاحتمالي لذي الحدين وهو توزيع إحصائي بالغ الأهمية ويشيع استخدامه في الحياة العملية مثل تقدير نسبة التالف من سلعة معينة.

وسوف نتناول مبدأ العد " التباديل والتوافيق" على النحو الآتي:

1.2. التباديل:

تعتبر التباديل من طرائق العد لحدوث فعل معين، وتستخدم بصورة كبيرة في حساب احتمال حدوث فعل معين. ففي الكثير من المشاكل الرياضية، يتطلب الأمر منا -حلاً للمشكلة- معرفة عدد الطرق التي يمكن بواسطتها اختيار مجموعة من العناصر. ونضرب مثالاً بسيطاً على ذلك، إذا كان لدينا مُديران $\{m_1 , m_2\}$ وثلاثة مهندسين $\{e_1 , e_2 , e_3\}$

ونرغب في اختيار فريق يتكون من مدير ومهندس للقيام بزيارة لأحد فروع شركة البناء. فعند تكوين الفريق فإن لدينا طريقتين لاختيار المدير، وثلاث طرق لاختيار المهندس. وهذا يعني أن لدينا 6 طرائق لاختيار الفريق. ويوضح ذلك الجدول الآتي الطرائق المختلفة لتكوين الفريق.

	e_1	e_2	e_3
m_1	$\{m_1 , e_1\}$	$\{m_1 , e_2\}$	$\{m_1 , e_3\}$
m_2	$\{m_2 , e_1\}$	$\{m_2 , e_2\}$	$\{m_2 , e_3\}$

يلاحظ من خلال بيانات الجدول أنه تم ترتيب الفريق بست طرق مختلفة.

ونستنتج من ذلك أن التباديل تعني حساب عدد طرق ترتيب الأشياء.

1.1.2. تعريف التباديل:

التباديل هي عدد الطرق الممكنة لاختيار وترتيب عدد r عنصراً من n عنصراً، أخذت كلها مرة واحدة أو جزء منها كل مرة، بشرط أن: $r \leq n$ حيث. n , r أعداد صحيحة موجبة.

فعندما تكون n , r أعداد صحيحة موجبة، $r < n$ فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار وترتيب r عنصر من n عنصر هو: P^n_r ، وتقرأ n تباديل r.

على سبيل المثال، إذا كان لدينا 5 عناصر ونرغب في اختيار وترتيب ثلاثة عناصر منها فإن عدد الطرق الممكنة هي:

$$P^5_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ طريقة}$$

والذي يجب ملاحظته هنا هو: أننا نحدد جميع الطرائق الممكنة لاختيار ثلاثة عناصر من خمسة عناصر ثم نحدد جميع الطرائق المختلفة لترتيب العناصر المختارة. لذلك فإننا نختار العناصر أولاً ثم نرتب العناصر المختارة ثانياً. وهذا يعني أن التباديل تهتم ليس فقط بعملية الاختيار وإنما أيضاً بعملية الترتيب.

مثال1:



كم عدداً ثلاثياً يمكن تكوينه من الأرقام: 3 , 2 , 1 ؟

الحـــل :

بالعد البسيط سوف نجد أن جميع الأعداد الممكنة=

$$321 \;,\; 312 \;,\; 132 \;,\; 231 \;,\; 213 \;,\; 123$$

ويمكن أن نصل إلى النتيجة نفسها وذلك بتركيب الرقم بطرق عددها:

$$P^3_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6 \text{ طرق}$$

2.1.2. قوانين التباديل:

توجد العديد من القوانين المرتبطة بموضوع التباديل من أهمها وأشهرها القانونين الآتيين:

$$P^n_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1 = n! \quad (1)$$

$$P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (2)$$

ويعني القانون الأول:

إذا كان لدينا عدد (n) من الأشياء المختلفة ويراد ترتيبها في (n) من الأماكن، فإن عدد طرق الترتيب = $n!$ وتقرأ مضروب n

تعريف: $n!$

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن:

$$n! = n(n-1)\times(n-2)\ ...\times 3\times 2\times 1$$

ويلاحظ في العلاقة(1) أن الطرف الأيمن يحتوي على عدد من العوامل عددها n ، تبدأ بالعامل n يليه عوامل أخرى كل ينقص عن سابقه بمقدار واحد صحيح.

مثال2:

كم هي الأعداد الثلاثية التي يمكن تكوينها من الأرقام: 1 , 2 , 3 ?

الحـل :

$\because P^n_n$ $\therefore P^3_3 = 3\times 2\times 1 = 6$ أعداد

ويعني القانون الثاني:

إذا كان لدينا عدد من الأشياء المختلفة (n) ويراد ترتيبها في عدد من الأماكن:

$r < n$ ، فإن ذلك يتم بعدد من الطرق= P^n_r

مثال3:

كم عدد الطرق الممكنة لترتيب أربعة كتب في مكانين شاغرين بالمكتبة؟

الحـل :

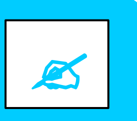
تحليل المسألة: المطلوب هو ترتيب 4 أشياء مختلفة (كتب) في عدد من الأماكن أقل من 4 هما مكانان. وبناءً عليه يتم تطبيق القانون الثاني. ويلاحظ أن عدد الطرق الممكنة لترتيب الكتب = 12طريقة.

$$\because P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad \therefore P^4_2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4\times 3\times 2!}{2!}$$

$= 4\times 3 = 12$ طريقة

نتائج هامة:

$P^n_n = n!$, $P^n_0 = 1$, $0! = 1$



مثال4:

أوجد قيمة:

(a) P^5_5 (b) P^4_0

تحليل المسألتين:

$P^5_5 : \rightarrow n = r$

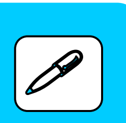
تعني عدد الطرائق لترتيب خمس عناصر.

P^4_0 : تمثل عدد الطرائق التي نختار فيها أي من العناصر الأربعة.

الحـــل :

(a) $P^5_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(b) $P^4_0 = \frac{4!}{(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1$ □



تدريب (1)

بكم طريقة يمكن أن يجلس 3 طلاب على 3 كراسي من بين 6 كراسي في مكتبة الكلية؟

أسئلة التقويم الذاتي (1)

?

1 - كم عدد الطرق الممكن لترتيب أربعة أرقام مختلفة من مكونات الأعداد التالية: 4 , 5 , 2 , 7 ؟

2- بكم طريقة يمكن لنا وضع كتابين في 5 خانات إذا كانت الخانة لا تتسع إلا لكتاب واحد؟

وسوف نستعرض المواقف المختلفة للتباديل في الحالات الآتية:

الحالة الأولى: تباديل (n) من العناصر المختلفة أخذت كلها مرة واحدة

مثال5:

كم عدد الطرق التي يمكن من خلالها ترتيب خمسة طلاب لأخذ صورة أثناء قيامهم برحلة ترفيهية؟

الحــــل :

❖ باستخدام العلاقة(1):

$$P_5^5 = 5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$$ طريقة

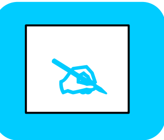
تحليل المسائلة:

❖ترتيب عدد من أشياء مختلفة في الأماكن نفسها.

❖يتضح من المثال أننا نريد الحصول على عدد الترتيب الممكنة لترتيب خمسة طلاب لأخذ صورة أثناء الرحلة.

الحالة الثانية: تباديل (n) من العناصر المختلفة تؤخذ بعضها (r) في كل مرة.

مثال6:



إذا كان لدينا خمسة طلاب ونريد اختيار لجنة تتكون من ثلاثة منهم لمتابعة الأنشطة الاجتماعية بكلية العلوم الإدارية. كم عدد الطرق الممكنة لاختيار اللجنة؟

الحــــل :

❖ يلاحظ أن عدد الطرق لاختيار اللجنة هو:

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!}$$

$$= \frac{5\times 4\times 3\times 2!}{2!} = 60$$ طريقة

الحالة الثالثة: تباديل (n) من العناصر المختلفة في شكل دائري.

يمكن وضع (n) من الأشياء المختلفة في ترتيب دائري بطرق عددها :

$$(n-1)!$$

مثال7:

بكم طريقة يمكن أن يجلس خمسة طلاب حول طاولة مستديرة في مكتبة كلية العلوم الإدارية؟



الحـــل :

$\because (n-1)! \quad \therefore (5-1)! = 4!$

$= 4\times3\times2\times1=24$ طريقة

الحالة الرابعة: التباديل بين العناصر المتشابهة عندما تؤخذ كلها في مرة واحدة.

إذا كنت الأشياء تتكون من مجموعات متشابهه. الأولى عددها n_1 ، الثانية عددها n_2 ، الثالثة عددها n_3 ، .... وهكذا. فإن عدد التباديل لهذه الأشياء عندما تؤخذ كلها في كل مرة هو:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\ ....}$$

حيث:

$$n= n_1 + n_2 + n_3 +.....\square$$

مثال 8:

ما عدد الأرقام المختلفة التي يمكن تكوينها من مكونات الرقم 885985 ؟

الحـــل :

تحليل المسألة:
يلاحظ أن:
عدد الخانات هو 6،
يوجد بينها الرقم 8
يظهـــر 3 مـــرات،
والـــرقم 5 يظهـــر
مـــرتين والـــرقم 9
يظهر مرة واحدة.

$$\because n=6 \;,\; n_1=3 \;,\; n_2=2 \;,\; n_3=1$$

$\therefore$ عدد الطرق المختلفة=

$$\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times 2\times 1}$$

$=6\times5\times2=60$ طريقة

مثال9:

بكم يمكن ترتيب الحروف الواردة في كلمة "Management" ؟

تحليل المسألة:
يلاحظ أن:
عدد الحروف = 10
يوجد بينها الحروف
الآتية تظهر مرتين:
M , a , n , e
وتظهر كل من الحرفين
الآتيين مرة واحدة :
q , t

$$\because n=10 \,,\, n_1=2 \,,\, n_2=2 \,,\, n_3=2 \,,\, n_4=2 \,,\, n_5=1 \,,\, n_6=1$$

$\therefore$ عدد الطرق المختلفة=

$$\frac{10!}{2!\times 2!\times 2!\times 2!\times 1!\times 1!}$$

$$=\frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times2\times2\times2\times1\times1}$$

$= 226800$ طريقة

تدريب (2)

إذا كانت:

$$X=\{1,2,3,4,5\}$$

أولاً: ما هي الأعداد التي يمكن تكوينها من ثلاثة أرقام مختلفة نختارها من عناصر X

ثانياً: ما هي الأعداد التي يمكن تكوينها من خمسة أرقام مختلفة نختارها من عناصر X

أسئلة التقويم الذاتي (2)

اوجد قيمة:

(a) $\frac{9!}{5!}$ (b) P^{6}_{1} (C) P^{10}_{12}

تدريب (3)

1- بكم طريقة يمكن وضع كتابين في خمس خانات في مكتبة كلية العلوم الإدارية إذا كانت الخانات لا تتسع إلا لكتاب واحد.

2- بكم طريقة يمكن ترتيب الأرقام:(4 , 5 , 2 , 7) لتكوين عدد مكون من 4 أرقام مختلفة.

تدريب (4)

اختارت كلية العلوم الإدارية في اليوم العالمي لمحاربة التدخين شعاراً من ثمانية ألوان، منها أربعة زرقاء وثلاثة بيضاء والباقي أحمر. كم عدد الطرق التي يمكن ترتيب الألوان الثمانية في هذا الشعار؟



أسئلة التقويم الذاتي (3)

بكم طريقة يمكن أن يجلس 5 طلاب حول:

1- طاولة دائرية الشكل.

2- طاولة مستطيلة الشكل.

2 .2. التوافيق: Combinations

لنفرض أن لدينا 6 كتب ونريد ترتيب هذه الكتب على رف في مكتبة كلية العلوم الإدارية، فإن عدد الطرق التي نختار بها ومن ثم نرتب 4 كتب بعدد من الطرق: $P_4^6 = 6\times5\times4\times3 = 360$. إلا أنه في كثير من الحالات نريد فقط أن نعرف عدد الطرق التي نختار بها 4 كتب من 6 كتب، فإن الترتيب هنا ليس له أهمية. وبناءً عليه فإن عدد الطرق الممكنة للاختيار في هذه الحالة "بغض النظر عن الترتيب" هو: $\{P_4^6 \ / 4! = 15\}$

2 .2 .1. تعريف التوافيق:

تُعرّف التوافيق بأنها: عبارة عن جميع الاختيارات الممكنة لعدد r عنصراً من n عنصراً بغض النظر عن الترتيب.

2 .2 .2. قوانين التوافيق:

إذا كانت r , n أعداداً صحيحة موجبة بحيث أن $(n \geq r)$، فإن عدد طرق اختيار r من n عنصر هو:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (1)$$

وتقرأ n توافيق r

ويستخدم القانون السابق لإيجاد عدد الطرق الممكنة لحدوث فعل ما بغض النظر عن الترتيب.

مثال10:



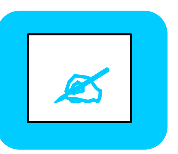
يرغب عميد كلية العلوم الإدارية في اختيار أربعة طلاب من بين سبعة طلاب للإشراف على الأنشطة الاجتماعية في الكلية، بكم طريقة يمكن اختيار هؤلاء الطلاب.

الحـــل :

عدد الطرق الممكنة=

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{7!}{4! \times 3!}$$

$$= \frac{7\times6\times5\times4!}{4!\times3\times2\times1} = \frac{7\times6\times5}{6} = 35$$ طريقة



مثال 11:

بكم طريقة يمكن اختيار 3 طلاب من بين ثمانية طلاب للقيام برحلة:

1- بدون قيود على اختيار الثلاثة الطلاب.

2- إذا كان أحد الطلاب لابد أن يوجد في كل اختيار.



الحـــل :

$$(1)\ C_3^8 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\times5!}$$

$$= \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$$ طريقة

$$(2)\ C_2^7 = \frac{7\,!}{2!\ (7-2)} = \frac{7\times6\times5!}{2!\times5!}$$

$$= \frac{7\times6}{2\times1} = 21$$ طريقة

تحليل المسألتين:

1- لا توجد قيود على عملية الاختيار، وبالتالي يتم تطبيق القانون(1)مباشرة.

2- نظراً لأن أحد الطلاب سوف يكون موجوداً في كل اختيار، إذن يستبعد من عملية الاختيار، بمعنى يتم اختيار 2 من 7

$$C_r^n = C_{n-r}^n \qquad (2)$$

مثلاً:

$$(1)\ \ C_3^6 = C_{6-3}^6 = C_3^6$$

$$= \frac{6\,!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!\times3!}$$

$$= \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

$$(2)\ C_7^{10} = C_{10-7}^{10} = C_3^{10}$$

$$= \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = \frac{10!}{3! \times 7!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

تحليل المسألة:
يلاحظ هنا أن عميد الكلية يرغب في معرفة عدد طرق اختيار الطلاب فقط. بمعنى أن الترتيب ليس له أهمية.

$$C_n^n = C_0^n = 1 \qquad (3)$$

مثلاً:

$$C_4^4 = C_{4-4}^4 = C_0^4 = 1 \rightarrow C_4^4 = C_0^4 = 1$$

$$\because C_4^4 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1 \quad ,$$

$$\because C_0^4 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1 \qquad \therefore C_4^4 = C_0^4 = 1$$

$$C_r^n = \frac{P_r^n}{r!} \qquad (4)$$

العلاقة بين التباديل والتوافيق.

مثلاً:

$$C_3^5 = \frac{P_3^5}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$$

مثال 2 :



صندوق يحتوي على 3 بطاقات حمراء و 3 بطاقات صفراء و 4 بطاقات خضراء،
أوجد عدد الطرق التي يمكن بها سحب 5 بطاقات من الصندوق بحيث:

1- تحتوي البطاقات على بطاقتين حمراء وبطاقتين صفراء.
2- تحتوي البطاقات على 5 بطاقات خضراء.
3- تحتوي البطاقات على 3 بطاقات خضراء على الأقل والباقي بطاقات صفراء.
4- لا تحتوي البطاقات على بطاقة صفراء.

الحـــل :

عند سحب البطاقات الخمس فإننا لا نميز بين البطاقات إلا في لون البطاقة، بمعنى أن الترتيب ليس له أهمية في هذه الحالة لأنه لا يمكن أن نميز بين بطاقتين من اللون نفسه. لذلك سوف نستخدم التوافيق لحل جميع الفقرات السابقة.

1. عدد الطرق الممكنة لاختيار البطاقات هو:

$$C_2^3 \times C_2^3 \times C_1^4 =$$
$$3 \times 3 \times 4 = 36$$
طريقة

2. يلاحظ من خلال التمرين أن الصندوق يحتوي على أربع بطاقات خضراء اللون، لذلك لا يمكن اختيار خمس بطاقات جميعها ذات لون أخضر. بمعنى أن عملية الاختيار في هذه الحالة مستحيلة. فيتم اختيار ثلاث بطاقات خضراء اللون على الأقل، والباقي بطاقات صفراء.

يلاحظ أننا نرغب في اختيار بطاقتين من اللون الأحمر وبطاقتين من اللون الأصفر، وبالتالي فان البطاقة الخامسة ستكون من اللون الأخضر.

3. يتم تحليل المسألة كما يلي:

اختيار ثلاث بطاقات خضراء على الأقل: يعني اختيار ثلاث بطاقات أو أربع بطاقات، وبناءً عليه:

- يكون لدينا ثلاث بطاقات خضراء على الأقل والباقي بطاقات صفراء عندما يكون لدينا ثلاث بطاقات من اللون الأخضر مع بطاقتين من اللون الأصفر أو أربع بطاقات من اللون الأخضر مع بطاقة من اللون الأصفر، وبالآتي فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار البطاقات الخمس هو:

$$C_3^4 \times C_2^3 + C_4^4 \times C_1^3 =$$
$$4 \times 3 + 1 \times 3 = 15$$
طريقة

4-عندما لا تحتوي البطاقات على بطاقة صفراء فإن الصندوق في هذه الحالة يكون فيه سبع بطاقات من اللونين الأحمر والأخضر، وبالآتي فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار خمس بطاقات هو:

$$C_5^7=\frac{7!}{5!\,(7-5)!}=\frac{7!}{5!\times 2!}$$ □

$$=\frac{7\times 6}{2\times 1}=21$$

طريقة

أسئلة التقويم الذاتي (4)

؟

بكم طريقة يمكن اختيار أستاذين، وثلاثة طلاب من بين خمسة أساتذة، وستة طلاب؟



تدريب (5)

إذا كانت :



$x=\{1,2,3,4,5\}$

فما عدد المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها، بحيث تتكون كل مجموعة من ثلاثة عناصر.

تدريب (6)



إدارتان الأولى بها 7 أفراد والثانية بها 5 أفراد. كم عدد الطرق التي يمكن فيها تشكيل لجنة مكونة من 6 أفراد:

1- بدون شروط.

2- بحيث تشمل 3 أفراد من الإدارة الثانية على الأقل.

3. الخلاصة:

تناولت هذه الوحدة مبدأ العد الذي يساعد في كثير من المواقف لمعرفة عدد طرق حدوث فعل " ما".

1- التباديل:

عبارة عن جميع الطرق الممكنة لاختيار عدد (r) عنصراً من (n) من العناصر مع مراعاة الترتيب. وتناولت الوحدة الحالات المختلفة للتباديل:

- الحالة الأولى التي توضح إيجاد عدد الطرق الممكنة عندما نختار جميع عناصر لمجموعة.
- الحالة الثانية التي تبين كيفية حساب عدد الطرق المختلفة عندما نختار r عنصراً من مجموعة العناصر.
- الحالة الثالثة تركز على تباديل عدد n من العناصر في شكل دائري.
- الحالة الرابعة تبرز أسلوب التباديل في حالة العناصر المتماثلة عندما تؤخذ كلها.

2- التوافيق:

عبارة عن جميع الطرق الممكنة لاختيار عدد (r) عنصراً من (n) من العناصر بغض النظر عن الترتيب.

وتعرضت الوحدة أيضا إلى القوانين المختلفة للتوافيق بالإضافة إلى العلاقة التي تربط بين التباديل والتوافيق.

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الرابعة:

عزيزي الدارس، بعد دراستك للوحدة الثالثة (التباديل والتوافيق) أصبحت قادراً على أن توضح الفرق بين التباديل والتوافيق، واستخدام الحالات المختلفة للتباديل لمعرفة عدد الطرق المختلفة لحدوث فعل ما بالإضافة إلى استخدام قوانين التوافيق لتحديد جميع الطرق الممكنة الاختيار r عنصراً من مجموعة من العناصر.

وفي الوحدة الرابعة سنتطرق إلى نظرية ذات الحدين التي تعد امتداداً لتطبيقات التوافيق- وتهدف هذه النظرية إلى إيجاد مفكوك مقدار جبري مكون من مجموع حدين أو الفرق بينهما مرفوعاً إلى قوة معينة.

5. إجابات التدريبات:

تدريب (1):

عدد طرق جلوس الطلاب الثلاثة=

$$P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!}$$

$= 6\times5\times4 = 120$ طريقة

تدريب (2):

أولاً: عدد الأعداد = تباديل 5 أرقام مأخوذة ثلاثة مرات=

$P_3^5 = 5\times4\times3 = 60$ طريقة

ثانياً: عدد الأعداد= تباديل 5 أرقام مأخوذة كلها في كل مرة=

$P_5^5 = 5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$ طريقة

تدريب (3):

1-عدد الطرق الممكنة لوضع كتابين في خمس خانات=

$P_2^5 = 5\times4 = 20$ طريقة

2-عدد الطرق الممكنة لترتيب الأرقام=

$P_4^4 = 4\times3\times2\times1 = 24$ طريقة

تدريب (4):

تحليل المسألة:

يلاحظ أن مجموع الألوان في الشعار تساوي ثمانية ألوان. وفي هذه الحالة يتم استخدام الحالة الرابعة من حالات التباديل.

$n = 8 \quad , \quad n_1 = 4 \quad , \quad n_2 = 3 \quad , \quad n_3 = 1$

إذن عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب الألوان في الشعار=

$$\frac{8!}{4!\times 3!\times 1!}=\frac{8\times 7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1\times 1}=280$$ طريقة

تدريب (5):

يلاحظ أن عدد عناصر X = خمسة عناصر، وبالآتي فإن المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها=

$$C_3^5=\frac{5!}{3!\,(5-3)!}=\frac{5!}{3!\times 2!}$$

$$=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$ مجموعات

تدريب (6)

1- اختيار اللجنة بدون شروط:

$$C_6^{12}=\frac{12!}{6!\,(12-6)!}=\frac{12!}{6!\times 6!}$$

$$=\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=924$$ طريقة

2- بحيث تشمل اللجنة 3 أفراد من الإدارة الثانية على الأقل.

يتم تحليل المطلوب في هذه الفقرة كما يأتي:

- ❖ ثلاثة أفراد من الإدارة الأولى وثلاثة من الثانية. المجموع ستة أفراد.

أو

- ❖ فردين من الإدارة الأولى وأربعة من الثانية. المجموع ستة أفراد.

- ❖ فرد واحد من الإدارة الأولى وخمسة من الثانية. المجموع ستة أفراد.

$$C_3^7\times C_3^5+C_2^7\times C_4^5+C_1^7\times C_5^5$$

$$= \frac{7!}{3!\,(7-3)!} \times \frac{5!}{3!\,(5-3)!} + \frac{7!}{2!\,(7-2)!} \times \frac{5!}{4!\,(5-4)!} + \frac{7!}{1!\,(7-1)!} \times \frac{5!}{5!\,(5-5)!}$$

$$= \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} + \frac{7!}{2! \times 5!} \times \frac{5!}{4! \times 1!} + \frac{7!}{1! \times 6!} \times \frac{5!}{5! \times 0!}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{7 \times 6}{2 \times 1} \times 5 + 7 \times 1$$

$= 35 \times 10 + 21 \times 5 + 7 = 462$ طريقة.

6. المراجع:

1. أبـو العــلا، عبـداللطيف عبـدالفتاح وآخـرون (1984): مقدمـة الرياضـيات للتجاريين والاقتصاديين، الطبعة الرابعة، القاهرة، جمهورية مصر العربية،
2. أبو بكـر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمس، القاهرة، جمهورية مصر العربية.
3. الجاسر، إبراهيم عبد الله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض المملكة العربية السعودية.
4. المنصـوري، محمـد توفيق وآخـرون (1991): أساسـيات الرياضة للتجـاريين (1)، منشورات جامعة القاهرة للتعليم المفتوح، جمهورية مصر العربية.
5. بـاروم، أحمـد محمـد وآخـرون (1988): الرياضـيات في الاقتصـاد والإدارة الطبعـة الخـامسة، دار الشـروق للنشـر والتوزيـع، جـدة: المملكـة العربيـة السعودية.
6. الوحيشـي، جمـال أحمـد، وآخـرون، (2006)، الرياضيات للعلـوم الإداريـة، الطبعة الرابعة، منشورات مركز الأمين، صنعاء، الجمهورية اليمنية.
7. حسـن، سـعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإداريـة، الطبعة الثالثة، منشـورات مركز الأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
8. مصـطفى، أحمـد فتحـي وآخـرون (2002): مقدمـة في الرياضيــات للعلـوم الإداريـة، الطبعـة الأولى، منشـورات جامعـة الملك سـعود، الريـاض: المملكـة العربية السعودية.

7. التعيينات:

السؤال الأول:

ما عدد الأرقام المختلفة التي يمكن تكوينها من مكونات الرقم 446846 ؟

السؤال الثاني:

بكم طريقة يمكن لأربعة طلاب الجلوس على خمسة كراسي بحيث يجلس اثنان متجاوران ؟

السؤال الثالث:

في امتحان الرياضيات للعلوم الإدارية يجب على الطالب أن يجيب عن ثمانية من عشرة أسئلة.

1- بكم طريقة يمكن للطالب أن يختار الأسئلة؟

2- كم عدد الطرق الممكنة التي تمكن الطالب من اختيار الأسئلة ، إذا كان من الضروري أن يجيب على أربعة أسئلة من الخمسة الأولى؟

السؤال الرابع:

أراد احد التجار إتباع أسلوب جديد في تسويق 12 نوعاً من السلع الراكدة لديه عن طريق تكوين عبوات مختلفة بحيث تحتوي كل عبوة على خمسة أصناف وذلك لبيع هذه العبوات المختلفة بأسعار مخفضة ، كم عدد العبوات التي يمكن لهذا التاجر أن يكونها؟

السؤال الخامس:

دخل أربعة طلاب قاعة الحاسب الآلي فوجدوا بها 10 أماكن خالية ، أوجد عدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بها؟

السؤال السادس:

كم عدد الطرق التي يمكن اختيار أربعة طلاب من بين ثمانية:

1- بدون قيود.

2- إذا كان أحد الطلاب لابد وأن يوجد في كل اختيار.

السؤال السابع:

تقدم ثلاثة مرشحين لوظيفة مدير مبيعات وخمسة مرشحين لوظيفة مندوب تسويق، أوجد عدد الطرق التي يمكن شغل الوظيفتين بها؟

4 الوحدة الرابعة

نظرية ذات الحدين

محتويات الوحدة

1- المقدمة:

1.1. تمهيد :

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى الوحدة الرابعة (نظرية ذات الحدين) التي تتألف من أربعة أقسام رئيسة ، حيث يزودك القسم الأول بمفهوم نظرية ذات الحدين، وخلفية عامة عن أهميتها.

ويتناول القسم الثاني نص النظرية وخواصها ، وأسلوب إيجاد مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن عزيزي الطالب من استيعاب إيجاد مفكوك ذات الحدين.

ويُركز القسم الثالث على الحد العام لمفكوك ذات الحدين. وسوف نتناول فيه بالشرح والتحليل مفهوم الحد العام، وكيفية إيجاد قيمة أي حد من حدود المفكوك دون أن نفك المقدار كاملا.

وفي القسم الثالث سوف نتناول فيه أسلوب إيجاد معامل X^n في مفكوك ذات الحدين، متضمناً أمثلة متنوعة وشاملة تمكنك من التعامل مع المسائل المختلفة في مثل تلك الحالات.

أما القسم الرابع فيتناول مفهوم الحد الخالي من X^n وكيفية إيجاد قيمته.

وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل على أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي وهي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية تكتسب من خلالها المهارة والقدرة على التعامل مع التمارين التي قد تواجهك في الحياة العملية.

2.1. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية الرابعة وهي بعنوان " نظرية ذات الحدين " ويتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تعرف مفهوم نظرية ذات الحدين.
2. تعرف خواص نظرية ذات الحدين.
3. توجد مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب.
4. توجد أي حد من حدود مفكوك ذات الحدين.
5. تحسب معامل X^n في مفكوك ذات الحدين.
6. تحسب الحد الخالي من X في مفكوك ذات الحدين.
7. تميز بين معامل X^n والحد الخالي من X في مفكوك ذات الحدين.



3.1. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من أربعة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الأول منها -بمفهوم نظرية ذات الحدين وخواصها- بالهدف الأول، والثاني والثالث والذي يركز على مفهوم النظرية وخواصها.

وارتبط القسم الثاني منها بمفهوم الحد العام لمفكوك ذات الحدين، وأسلوب إيجاد قيمة أي حد من حدود المفكوك، ويتحقق هذا من خلال الهدف الرابع.

وفي القسم الثالث سوف تتعرف على مفهوم معامل X^n وإيجاد قيمته. ويحقق ذلك الهدف الخامس.

أما القسم الرابع فقد ارتبط بمفهوم الحد الخالي X وكيفية إيجاد قيمته. ويحقق ذلك الهدف السادس.

4.1. القراءات المساعدة:

تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، أمل -عزيزي الدارس- أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.



1. الجاسر، إبراهيم عبد الله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض المملكة العربية السعودية.
2. مصطفى، احمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
3. باروم، احمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
4. الوحيشي، جمال أحمد وآخرون (2006) الطبعة الرابعة ، منشورات مركز الأمين، صنعاء : الجمهورية اليمنية.

5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس لكي تحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة والتقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاءً من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلي التأكد من تهيئتك المكان الملائم للدراسة ولديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. نظرية ذات الحدين:

1.2. مفهوم النظرية:

كل مقدار جبري مكون من مجموع حدين أو الفرق بينهما يعرف باسم مقدار ذي حدين، فكل من المقادير $(a+b)$ ، $(a-b)$ ، $(2a+3b)$ مقادير ذو حدين.

وعندما يكون لدينا مقدار مكون من حاصل جمع أو طرح حدين، مرفوع لأس صحيح موجب فإننا نحتاج إلى نظرية ذات الحدين للحصول على مفكوك المقدار وخاصة عندما يكون الأس عدداً كبيراً نسبياً. فمثلاً إذا كان لدينا المقدار $(a+b)^n$ ، فإن مفكوك هذا المقدار لبعض قيم n هو:

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ولكن عندما نرغب في الحصول على مفكوك المقدار $(a+b)^{25}$ ، فيجب علينا في هذه الحالة ضرب المقدار $(a+b)$ في نفسه خمساً وعشرين مرة، ولصعوبة ذلك فإننا نستخدم نظرية ذات الحدين للحصول على النتيجة المطلوبة.

2.2. نظرية ذات الحدين بأس صحيح موجب:

نفرض أن b , a أعداد حقيقية وكانت n عدد صحيح موجب فإن:مفكوك مقدار ذات الحدين:

$$(a+b)^n = a^n + C_1^n \ a^{n-1} b + C_2^n \ a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n \ a^{n-n} + b^n$$

$$(a-b)^n = a^n - C_1^n \ a^{n-1} b + C_2^n \ a^{n-2} b^2 - \dots + C_n^n \ a^{n-n} - b^n$$

3.2. خواص نظرية ذات الحدين:

إذا نظرنا إلى الطرف الأيمن لمفكوك نظرية ذات الحدين نلاحظ ما يأتي:

1-عدد حدود مفكوك النظرية يزيد بمقدار واحد صحيح عن قيمة الأس المرفوع له المقدار في الطرف الأيسر، أي أن عدد حدود المفكوك يساوي $n+1$.

2- الحد الأول في مفكوك النظرية هو الحد الأول في مقدار ذات الحدين، مرفوعاً لنفس أس المقدار، أي أن الحد الأول يكون في الصورة: a^n.

3- الحد الأخير في مفكوك النظرية هو الحد الثاني في مقدار ذات الحدين، مرفوعاً لنفس أس المقدار، أي أن الحد الأخير يكون في الصورة: b^n.

4- ينقص أس الحد الأول a ويزداد أس الحد الثاني b بمقدار واحد مع انتقالنا من حد إلى حد في مفكوك النظرية.

5-حاصل جمع الأسين للعددين: b , a في أي حد من حدود المفكوك يساوي أس مقدار ذات الحدين في الطرف الأيسر.

6- المعاملات الرقمية لكل حد من حدود المفكوك يتم الحصول عليها باستخدام العلاقة الرياضية للتوافيق: C_r^n

مثال 1:

أوجد مفكوك المقدار: $(a+b)^4$

$$\therefore (a+b)^4$$

$$=a^4+C_1^4 a^{4-1}b+C_2^4 a^{4-2} b^2+C_3^4 a^{4-3} b^3+b^4$$

$$=a^4+\frac{4!}{1!(4-1)!} a^3 b+\frac{4!}{2!(4-2)!} a^2b^2+\frac{4!}{3!(4-3)!} ab^3+b^4$$

$$=a^4+4a^3b+\frac{4\times 3}{2\times 1} a^2 b^2+4ab^3+b^4$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

وبتطبيق خواص ذات الحدين على المسألة:

❖ نلاحظ أن عدد حدود المفكوك= خمسة حدود، بمعنى أن عدد الحدود يزيد بمقدار واحد عن الأس الأصلي لذات الحدين، وأن الحد الأول a في مقدار ذات الحدين يتناقص عند انتقالنا من حد إلى حد.

❖الحد الثاني في مقدار ذات الحدين يتزايد عند انتقالنا من حد إلى حد، ومجموع الأسين للعددين: a , b في أي حد من حدود المفكوك يساوي أس مقدار ذات الحدين في الطرف الأيسر.

مثال2:

أوجد مفكوك المقدار: $(2X+Y)^4$

الحل:

باستخدام الصورة العامة لمفكوك ذات الحدين:

$$\therefore (2X+Y)^4$$

$$=(2X)^4+C_1^4(2X)^3Y+C_2^4(2X)^2Y^2+C_3^4(2X)Y^3+Y^4$$

$$=16X^4+\frac{4!}{1!(4-1)!}8X^3Y+\frac{4!}{2!(4-2)!}4X^2Y^2+\frac{4!}{3!\times 1!}2XY^3+Y^4$$

$$=16X^4+\frac{4!}{1!\times 3!}8X^3Y+\frac{4!}{2!\times 2!}4X^2Y^2+\frac{4!}{3!\times 1!}2XY^3+Y^4$$

$$=16X^4+\frac{4}{1}8X^3Y+\frac{4\times 3}{2\times 1}4X^2Y^2+\frac{4}{1}2XY^3+Y^4$$

$$\therefore (2X+Y)^4=16X^4+32X^3Y+24X^2Y^2+8XY^3+Y^4 \square$$

مثال3:



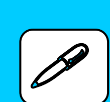
أوجد مفكوك المقدار: $(2X-Y)^4$

الحـل:

باستخدام الصورة العامة لمفكوك ذات الحدين:

$$\therefore (2X-Y)^4 =$$
$$(2X)^4 - C_1^4(2X)^3Y + C_2^4(2X)^2Y^2 - C_3^4(2X)Y^3 + Y^4$$
$$=16X^4 - \frac{4!}{1!(4-1)!}8X^3Y + \frac{4!}{2!(4-2)!}4X^2Y^2 - \frac{4!}{3!\times 1!}2XY^3 + Y^4$$
$$=16X^4 - \frac{4!}{1!\times 3!}8X^3Y + \frac{4!}{2!\times 2!}4X^2Y^2 - \frac{4!}{3!\times 1!}2XY^3 + Y^4$$
$$=16X^4 - \frac{4}{1}8X^3Y + \frac{4\times 3}{2\times 1}4X^2Y^2 - \frac{4}{1}2XY^3 + Y^4$$
$$\therefore (2X-Y)^4 = 16X^4 - 32X^3Y + 24X^2Y^2 - 8XY^3 + Y^4$$

تدريب (1)



باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك المقدارين:

1. $(2X+3Y)^5$

2. $(X+2Y)^4$

أسئلة التقويم الذاتي (1)



أوجد مفكوك المقدارين:

1. $\left(2X^2+\frac{1}{X}\right)^7$

2. $(9X^2+4Y)^4$

4.2. الحد العام في مفكوك نظرية ذات الحدين:

الصورة العامة للحد العام في مفكوك ذات الحدين هي:

$$U_{r+1} = C_r^n \, a^{n-1} \, b^r$$

حيث:

a : الحد الأول في مقدار ذات الحدين.

b : الحد الثاني في مقدار ذات الحدين.

ويستخدم الحد العام في مفكوك ذات الحدين لإيجاد:

- ❖ قيمة أي حد من حدود المفكوك.
- ❖ معامل X^n في مفكوك ذات الحدين.
- ❖ الحد الخالي من X .

الفكرة هي:
كتابة الحد العام للمقدار في أبسط صورة ثم استنتاج قيمة r.

مثال4:

أوجد الحد السادس في مفكوك: $(X+2Y)^8$

الحل:

$$\because U_{r+1} = C_r^n \, (a)^{n-r} \, (b)^r \square$$

$$\therefore U_{r+1} = C_r^8 \, (X)^{8-r} \, (2Y)^r \square$$

❖ يتم استنتاج قيمة r كما يأتي:

$$\because r+1 = 6 \rightarrow r = 5$$

$$\therefore U_6 = C_5^8 \, (X)^{8-5} \, (2Y)^5 = C_5^8 \, X^3 \, (2Y)^5 = \frac{8!}{5! \times 3!} X^3 \, 32Y^5$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \, 32 \, X^3 Y^5$$

$$\therefore U_6 = 1792 \, X^3 Y^5$$

مثال5:

أوجد الحد العام في مفكوك: $\left(2X+\frac{1}{4X}\right)^8$

ومنه أوجد قيمة الحد الثالث.

الحـل:

❖الحد العام للمقدار هو:

$$U_{r+1}=C_r^8\,(2X)^{8-r}\left(\frac{1}{4X}\right)^r$$

$$=C_r^8\,(2X)^{8-r}\left(2^{-2}X^{-1}\right)^r$$

$$=C_r^8\;2^{8-r}\times X^{8-r}\times 2^{-2r}\times X^{-r}$$

$$\therefore\ U_{r+1}=C_r^8\;2^{8-3r}\times X^{8-2r}$$

❖ لإيجاد الحد الثالث، لا بد من استنتاج قيمة r كما يأتي:

$$\because r+1=3\quad \therefore r=2$$

❖ يتم التعويض عن قيمة $r=2$ في الحد العام.

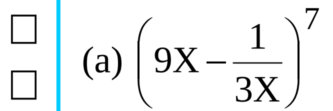
$$\therefore U_3=C_2^8\;2^{8-6}\times X^{8-4}$$

$$=C_2^8\,2^2\times X^4=\frac{8\times 7}{2}\,4X^4$$

$$\therefore U_3=112X^4$$

تدريب (2)

أوجد الحد الخامس للمقدار(a) والحد السادس للمقدار (b):



(a) $\left(9X-\frac{1}{3X}\right)^7$ (b) $(X+Y)^{15}$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

أوجد الحد العاشر للمقدار(a) والحد الرابع للمقدار (b):

(a) $\left(X-\frac{1}{2X}\right)^{12}$ (b) $\left(X^2+Y^2\right)^{11}$

5.2. إيجاد معامل X^n في مفكوك ذات الحدين:

الفكرة هي:

- ❖ إيجاد الحد العام للمقدار في أبسط صورة.
- ❖ استنتاج قيمة r لتحديد ترتيب الحد الذي تقع فيه X^n.

مثال 6:



أوجد معامل X^9 في مفكوك: $\left(x^2+\frac{2}{x^3}\right)^{12}$

الحل: يتم كتابة المقدار في الصورة: $\left(x^2+2x^{-3}\right)^{12}$

❖ وبناء عليه يتم كتابة الحد العام للمقدار في أبسط صورة كما يأتي:

$$\because U_{r+1}=C_r^{12}\left(X^2\right)^{12-r}\times\left(2X^{-3}\right)^r$$

$$=C_r^{12}\ X^{24-2r}\times X^{-3r}\times 2^r$$

$$=C_r^{12}\ X^{24-2r-3r}\times 2^r$$

$$=C_r^{12}\ X^{24-5r}\times 2^r$$

❖ يتم استنتاج قيمة r وذلك بمساواة X^9 بالعلاقة التي تتضمن X في الحد العام للمقدار كما يأتي:

$$\because X^{24-5r}=X^9\ \rightarrow\ 24-5r=9$$

$$\therefore 5r=24-9=15$$

$$\therefore r=3$$

❖ يتم التعويض عن قيمة $r=3$ في صورة الحد العام للمقدار:

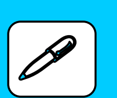
$$U_4=C_3^{12}X^{24-15}\times 2^3$$

$$=\frac{12!}{3!\times 9!}X^9\times 8\ \rightarrow\ \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ ومن القانون:

$$=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}X^9\times 8\ =1760X^9$$

$\therefore$ معامل $X^9=1760$

تدريب (3)



1-أوجد معامل X^{18} في مفكوك: $\left(1+3X^3\right)^7$

2-أوجد معامل X^4 في مفكوك: $\left(\frac{2}{X}+\frac{x^2}{2}\right)^{11}$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

?

1- أوجد معامل X^8 في مفكوك: $(1+X)^{12}$

2- اوجد معامل X^{-3} في مفكوك: $\left(X+\frac{2}{X}\right)^9$

6.2. إيجاد الحد الخالي من X في مفكوك ذات الحدين:

يكون الحد خالياً من X عندما تكون فيه قوة X = صفر.

مثال7:

أوجد ترتيب وقيمة الحد الخالي من X في مفكوك: $\left(3X^2+\frac{1}{3X}\right)^{12}$

الحل:

❖ يتم كتابة الحد العام للمقدار في أبسط صورة كما يأتي:

$$\because U_{r+1} = C_r^{12}\left(3X^2\right)^{12-r} \times \left(3^{-1}\ X^{-1}\right)^r \quad \square$$

$$= C_r^{12}\ 3^{12-r} \times X^{24-2r} \times 3^{-r}\ X^{-r}$$

إذن الحد العام للمقدار بعد جمع الأسس هو:

$$U_{r+1} = C_r^{12}\ 3^{12-2r} \times X^{24-3r}$$

❖ يتم استنتاج قيمة r وذلك بمساواة X^0 بالعلاقة التي تتضمن X في الحد العام للمقدار كما يأتي:

$$\because X^{24-3r} = X^0 \rightarrow 24 - 3r = 0$$

$$\therefore 3r = 24$$

$$\therefore r = 8$$

❖ ويكون الحد الخالي من X هو الحد التاسع. ولإيجاد قيمة هذا الحد يتم التعويض عن قيمة r في صورة الحد العام لمقدار ذات الحدين:

$$U_9 = C_8^{12}\ 3^{12-16} \times X^{24-24}$$

$$= \frac{12!}{8! \times 4!}\ 3^{-4}\ X^0 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3^4}$$

$$\therefore U_9 = \frac{495}{81} = \frac{55}{9}$$

❖ إذن قيمة الحد الخالي من X هو: $\frac{55}{9}$

تدريب (4)

أوجد الحد الخالي من X في مفكوك:

1. $\left(X - \frac{1}{2X^2}\right)^9$

2. $\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right)^{10}$

أسئلة التقويم الذاتي (4)

أوجد الحد الخالي من X في مفكوك:

1. $\left(X^2 + \frac{1}{X}\right)^9$

2. $\left(X^2 + \frac{1}{X}\right)^{12}$

3. الخلاصة

تناولت في هذه الوحدة نظرية ذات الحدين التي تساعد في كثير من المواقف لإيجاد مفكوك ذات الحدين وخاصة عندما يكون المقدار مرفوع لأس كبير. والموضوعات التي وردت في هذه الوحدة نلخصها فيما يأتي:

1- الصورة العامة لمفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب:

تستخدم هذه الصورة لإيجاد مفكوك مقدار ذات الحدين مرفوع لأس صحيح موجب.

2- الحد العام لمفكوك ذات الحدين:

يستخدم لإيجاد قيمة أي حد من حدود المفكوك دون أن نلجأ إلى إيجاد مفكوك المقدار بالكامل.

3- معامل X^n في مفكوك ذات الحدين:

يتم إيجاد هذا المعامل بناءً على كتابة الحد العام للمقدار في أبسط صورة واستنتاج قيمة r والتعويض بها في الحد العام للمقدار.

4- إيجاد الحد الخالي من X في مفكوك ذات الحدين:

يتم إيجاد قيمة الحد الخالي من X بعد كتابة الحد العام للمقدار في أبسط صورة واستنتاج قيمة r والتعويض بها في الحد العام للمقدار. ويكون الحد خالياً من X عندما تكون فيه قوة X = صفر.

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الخامسة:

عزيزي الدارس، ذكرنا في الوحدة الرابعة، أن نظرية ذات الحدين تساعد في كثير من المواقف لإيجاد مفكوك مقدار ذات الحدين في حالة أن أس ذلك المقدار يكون كبيراً إلى حد ما، بالإضافة إلى إيجاد قيمة أي حد من حدود المفكوك، إلا أنه في كثير من الأحيان نضطر إلى التعامل مع مجموعة من الأرقام المرتبة في صورة صفوف وأعمدة في مجال الرياضيات أو مجال الرياضة التطبيقية المختلفة مثل الإحصاء، والاقتصاد الرياضي أو القياسي وخلافه. ونظراً لأهمية موضوعات هذه الوحدة ومراعاة لأن الدارس لم يسبق له التعرض لمعالجة مثل هذه الحالات، فسوف نفرد هذه الوحدة لتقديم أهم القواعد والنظريات الخاصة بالمحددات.

5. إجابات التدريبات:

تدريب (1):

1. $(2X+3Y)^5$

$$=(2X)^5+C_1^5(2X)^4(3Y)+C_2^5(2X)^3(3Y)^2$$
$$+C_3^5(2X)^2(3Y)^3+C_4^5(2X)(3Y)^4+(3Y)^5$$
$$=32X^5+240X^4Y+720X^3Y^2+1080X^2Y^3$$
$$+810XY^4+243Y^5$$

2. $(X+2Y)^4$

$$=X^4+C_1^4X^3(2Y)+C_2^4X^2(2Y)^2+C_3^4X(2Y)^3+(2Y)^4$$
$$=X^4+4X^3(2Y)+6X^2(4Y^2)+4X(8Y^3)+16X^4$$
$$=X^4+8X^3Y+24X^2Y^2+32XY^3+16Y^4\square$$

تدريب (2):

1-أوجد الحد الخامس في مفكوك: $\left(9X-\frac{1}{3X}\right)^7$

$$\because U_{r+1}=C_r^n\ X^{n-r}\ Y^r$$
$$\therefore U_{r+1}=C_r^7\ (9X)^{7-r}\times(-3X)^{-r}$$
$$\because r+1=5\quad\therefore r=4$$
$$\therefore U_5=C_4^7(9X)^3\times(-3X)^{-4}$$
$$=C_4^7\ 729X^3\times\left(\frac{-1}{3X}\right)^4$$

$$= \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\, 729X^3 \times \left(\frac{-1}{81X^4}\right) \square$$

$$= \frac{25515}{81X} = \frac{-315}{X}$$

$$\therefore U_5 = \frac{315}{X}$$

2- أوجد الحد السادس في مفكوك: $(X+Y)^{15}$

$$\because U_{r+1} = C_r^n\, X^{n-r}\, Y^r$$

$$\therefore (X+Y)^{15} = C_r^{15} (X)^{15-r}\, (Y)^r \quad ,$$

$$\because r+1=6 \qquad \therefore r=5$$

$$\therefore U_6 = C_5^{15}\, X^{10}\, Y^5$$

$$= \frac{15\times14\times13\times12\times11}{5\times4\times3\times2\times1} X^{10}\, Y^5 \square$$

$$\therefore U_6 = 3003\, X^{10}\, Y^5$$

تدريب (3):

1- أوجد معامل X^{18} في مفكوك: $(1+3X^3)^7$

$$\because U_{r+1} = C_r^n\, X^{n-r}\, Y^r$$

$$\therefore U_{r+1} = C_r^7\, (1)^{7-r} \times (3X^3)^r$$

$$= C_r^7 (1)^{7-r} (3)^r (X)^{3r}$$

$$\because X^{3r} = X^{18} \qquad \therefore 3r=18 \qquad \therefore r=6\square$$

$\therefore$ الحد الذي يحتوي على معامل X^{18} في المفكوك، هو الحد السابع وقيمته:

$$U_7 = C_6^7 (1)\, (3)^6\, (X)^{18}$$

$$= 7\times729\, X^{18}$$

$$= 5103\, X^{18}$$

$\therefore$ معامل X^{18} هو: 5103

2- أوجد معامل X^4 في مفكوك:

$$\left(\frac{2}{X}+\frac{X^2}{2}\right)^{11}$$

$$\because U_{r+1}=C_r^n\ X^{n-r}\ Y^r$$

$$\therefore U_{r+1}=C_r^{11}\ (2)^{11-r}(\ X^{r-11})\ \times\ (X^2)^r\ (2)^{-r}$$

$$=C_r^{11}\ (2)^{11-2r}\ \ (X)^{3r-11}$$

$$\because X^{3r-11}=X^4 \qquad \therefore 3r-11=4 \qquad \therefore r=5$$

$\therefore$ الحد الذي يحتوي على معامل X^4 في المفكوك، هو الحد السادس وقيمته:

$$U_6=C_5^{11}(2)\ \times(X)^4$$

$$=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}\ 2\ X^4=924X^4$$

$\therefore$ معامل X^4 هو: 924

تدريب(4):

$$1.\left(X-\frac{1}{2X^2}\right)^9$$

$$\because U_{r+1}=C_r^n\ X^{n-r}\ Y^r$$

$$\therefore U_{r+1}=C_r^9\ (X)^{9-r}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^r\times\left(\frac{1}{X^2}\right)^r$$

$$=C_r^9\,(X)^{9-r}\ (X)^{-2r}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^r$$

$$=C_r^9\ X^{9-3r}\left(-\frac{1}{2}\right)^r$$

$$\because X^{9-3r}=X^0 \qquad \therefore 9-3r=0 \qquad \therefore r=3$$

∴ الحد الخالي من X ، هو الحد الرابع وقيمته:

$$U_4 = C_3^9 \left(-\frac{1}{2}\right)^r$$

$$= \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= -\frac{21}{2}$$

$$2. \left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right)^{10}$$

$$\because U_{r+1} = C_r^n \; X^{n-r} \; Y^r$$

$$= C_r^{10} \; (X^2)^{10-r} \times (X)^{-2r}$$

$$= C_r^{10} \; X^{20-2r} \times (X)^{-2r}$$

$$= C_r^{10} \; X^{20-4r}$$

$$\because X^{20-4r} = X^0 \qquad \therefore 20 - 4r = 0 \qquad \therefore r = 5$$

∴ الحد الخالي من X ، هو الحد السادس وقيمته:

$$U_6 = C_5^{10} = \frac{10\times9\times8\times7\times6}{5\times4\times3\times2\times1} = 252$$ □

□
□
□

6. المراجع:

1. أبو العلا، عبداللطيف عبدالفتاح وآخرون (1984): مقدمة الرياضيات للتجاريين والاقتصاديين، الطبعة الرابعة، القاهرة، جمهورية مصر العربية،
2. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمس، القاهرة، جمهورية مصر العربية.
3. الجاسر، إبراهيم عبد الله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض المملكة العربية السعودية.
4. المنصوري، محمد توفيق وآخرون (1991): أساسيات الرياضة للتجاريين (1)، منشورات جامعة القاهرة للتعليم المفتوح، جمهورية مصر العربية.
5. باروم، احمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
6. الوحيشي، جمال أحمد وآخرون (2006) الرياضيات في العلوم الإدارية ، الطبعة الرابعة، منشورات مركز الأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
7. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

7. التعيينات:

السؤال الأول:

أوجد كل من الحد السادس والحد التاسع في مفكوك المقدار:

$$(2X-3Y)^{11}$$

السؤال الثاني:

باستخدام مفكوك ذات الحدين، أوجد قيمة كل من:

$$1.(X+Y)^{6} \qquad 2.\left(3X-\frac{2}{3}\right)^{6}$$

السؤال الثالث:

أوجد الحد الثامن في مفكوك:

$$\left(\frac{X^{2}}{2}-2Y\right)^{16}$$

السؤال الرابع:

أوجد الحد الخالي من X في مفكوك كل من:

$$1.\left(X^{2}-\frac{1}{X}\right)^{9}$$

$$2.\left(X^{3}+\frac{1}{2X}\right)^{8}$$

السؤال الخامس:

أوجد معامل X^{16} في مفكوك:

$$(1+X)^{19}$$

5 الوحدة الخامسة

المحددات

محتويات الوحدة

1. المقدمـــــة:

1.1 تمهيد:

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى الوحدة الخامسة (المحددات) التي تتألف من أربعة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بتعريف المحدد، وخلفية عامة.

ويتناول القسم الثاني إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثانية متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن -عزيزي الطالب- من استيعاب أسلوب إيجاد قيمة المحدد واستخدامه في الحياة العملية.

ويُركز القسم الثالث على إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة، باستخدام الطريقة العامة وقاعدة ساروس.

أما القسم الرابع فيتناول خواص المحددات، حيث يركز هذا القسم على خواص المحددات ومدى أهميتها لإيجاد قيمة المحدد بتطبيق تلك الخواص المحدد دون إيجاد مفكوك المحدد باستخدام الطريقة العامة أو استخدام قاعدة ساروس.

وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب مفهوم المحددات. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

1 .2. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية الخامسة وهي بعنوان " المحددات " والذي يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تُعرّف المحدد.
2. تعرف المحدد من الدرجة الثانية.
3. تحسب قيمة المحدد من الدرجة الثانية.
4. تُعرّف المحدد من الدرجة الثالثة.
5. تحسب قيمة المحدد من الدرجة الثالثة.
6. تفرق بين المحدد من الدرجة الثانية والثالثة.
7. تشرح أهمية خواص المحددات لإيجاد قيمة المحدد.



3.1. أقسام الوحدة

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من أربعة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الأول بالهدف الأول، والذي يركز على تعريف المحدد من حيث المفهوم ورتبته.

وفي القسم الثاني تناولنا إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثانية وهذا يحقق الهدف الثاني والثالث.

أما في القسم الثالث فقد تم التركيز على المحدد من الرتبة الثالثة وكيفية حسابه وبهذا تحقق الهدف الرابع والخامس.

والقسم الرابع تناولنا فيه خواص المحددات، حيث بينا في هذا القسم مدى أهمية تلك الخواص للتعامل مع المحددات.

4.1. القراءات المساعدة:



تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، آمل- عزيزي الدارس- أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.

1- مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

2- باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.

2. .الوحيشي، جمال أحمد (2010) الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء، الجمهورية اليمنية.

3- حسن، سعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.

4- أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.

5- متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة والتقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاءً من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلي التأكد من تهيئتك المكان الملائم للدراسة ولديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. المحددات:

مقدمة:

نضطر كثيراً إلى التعامل مع مجموعة من الأرقام المرتبة في صورة صفوف وأعمدة؛ وذلك في مجال الرياضة البحتة أو مجالات الرياضة التطبيقية المختلفة مثل الإحصاء، والاقتصاد الرياضي، أو الاقتصاد القياسي وخلافه. ونظراً لأهمية هذا الموضوع؛ فسوف نفرد هذه الوحدة لتقديم أهم القواعد الخاصة بالمحددات.

2 .1. تعريف المحدد:

المحدد عبارة عن مجموعة من العناصر (الأرقام) المرتبة في شكل صفوف وأعمدة بحيث تتساوى عدد الصفوف و عدد الأعمدة. وتكتب هذه العناصر أو الأرقام بين خطين رأسيين متوازيين- | | - وينسب إلى كل محدد قيمة معينة تسمى " مفكوك المحدد " ونحصل عليه بعمليات حسابية تتناول جميع العناصر المكونة للمحدد.

والمحددات عموماً لها رتب مختلفة. وتتوقف قيمة هذه الرتب على عدد الصفوف والأعمدة المكونة للمحدد. فإذا احتوى محدد ما على أربعة عناصر مرتبة في شكل صفين وعمودين مثل:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

فيقال إن هذا المحدد من الرتبة الثانية.

وإذا احتوى محدد ما على تسعة عناصر مرتبة في شكل ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة مثل:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

□ **فيقال إن هذا المحدد من الرتبة الثالثة.**

وبالمثل فإن المحدد الذي يحتوى على ستة عشر عنصراً مرتبة في شكل أربعة صفوف وأربعة أعمدة يعرف باسم المحدد من الرتبة الرابعة وهكذا...

ويجب على الدارس أن يلاحظ أنه قد تم وضع رقمين أسفل كل عنصر من عناصر المحدد؛ بحيث يرمز الرقم الأول منهما من ناحية الشمال إلى ترتيب الصف الواقع فيه هذا العنصر، ويرمز الرقم الثاني إلى ترتيب العمود الواقع فيه هذا العنصر أيضاً. فمثلاً العنصر (a_{11}) يقع في الصف الأول والعمود الأول. والعنصر

(a_{23}) يقع في الصف الثاني والعمود الثالث. وعموماً فإن العنصر (a_{cd}) يقع في الصف ذو الترتيب (c) والعمود ذو الترتيب (d).

2.2. إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثانية:

لكل محدد - مهما اختلفت رتبته-قيمة تتعين بإيجاد مفكوك ذلك المحدد بطريقة المحيددات المرافقة للعنصر. وسوف نرمز لهذه القيمة بالرمز (Δ).

ولإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثانية يتم إتباع الخطوات الآتية:

1- تحديد الإشارات الخارجية لعناصر الصف الأول أو العمود الأول:

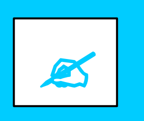
إذن الإشارات الخارجية لعناصر الصف الأول لمحدد يتكون من صفين وعمودين كالآتي :

$$\begin{matrix} (+) & (-) \\ \end{matrix}$$
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2- يتم إيجاد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي (a_{11} , a_{22}) مطروحاً منها عناصر القطر الفرعي (a_{21} , a_{12}).

وبالآتي فإن قيمة المحدد=

$$(a_{11} \times a_{22}) - (a_{21} \times a_{12})$$



مثال1 :

اوجد مفكوك المحددات الآتية:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad , \quad \text{(b):} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (5\times 2) - (1\times 3)$$
$$= 10 - 3$$
$$= 7$$

$$(b)\ \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (3\times 2)-(1\times -4)$$

$$=6+4$$

$$=10$$

تدريب (1)

❖ أوجد قيمة:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

❖ أوجد قيمة:

$$(a)\ \begin{vmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} b^2 & b^2 \\ -2b & b \end{vmatrix}$$

2 .3. إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة:

أولاً: استخدام الطريقة العامة:

لمعرفة كيفية إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة؛ والذي يأخذ الشكل:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

يلزم أولا تفهم معنى التعريفين الآتيين:

(1) المحيدد:

محيدد أي عنصر عبارة عن محدد جديد ناتج من المحدد الأصلي بعد حذف جميع عناصر الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر. فمثلاً محيدد العنصر (a_{11}) في المحدد السابق هو كالآتي:

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

، وبالمثل

فإن محيدد العنصر (a_{23}) هو كالآتي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

وهكذا

(2) العامل المرافق:

العامل المرافق لأي عنصر (a_{ij}) من عناصر المحدد، هو عبارة عن محيدد هذا العنصر مسبوقاً بإشارة (سالبة أو موجبة).

ويتوقف نوع الإشارة التي تسبق محيدد مرافق أي عنصر على أن يكون مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر زوجياً أو فردياً، فإذا كان مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر زوجيا كانت الإشارة موجبة، أما إذا كان مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر فردياً كانت الإشارة سالبة.

ويمكن تحديد الإشارة الجبرية للعامل المرافق للعنصر وفقاً للعلاقة الآتية:

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{ij} \times \Delta *$$

حيث:

$\tilde{a}_{ij}$: مرافق العنصر.

ij : ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر.

تحديد إشارة العامل المرافق:

إذا كان مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر زوجياً كانت الإشارة (+)، أما إذا كان مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر فردياً كانت الإشارة (-).

$*\Delta$: محدد محيدد العنصر (a_{ij}) بعد حذف الصف (i) والعمود (j) الواقع فيهما العنصر.

قاعدة الإشارات للمحدد= $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

مثال1:

باستخدام بيانات المحدد:

$$\begin{matrix} (+) & (-) & (+) \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

أوجد مرافقات العنصرين $(a_{11} \;,\; a_{23})$.

الحــل:

يتم تحديد الإشارات الخارجية لعناصر الصف الأول كما هو مبين سابقاً، ووفقاً للعلاقة السابقة فإن مرافقات العنصرين a_{11}, a_{23} تكون في الصورة الآتية:

❖مرافق العنصر(a_{11}) هو:

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \square + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

❖مرافق العنصر(a_{23}) هو:

$$\tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

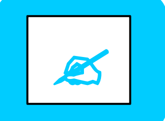
وباستخدام التعريفين السابقين فإنه لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة نتبع الخطوات الآتية:

1- تحديد الإشارات الخارجية لعناصر الصف الأول أو العمود الأول.

2- إيجاد مرافق كل عنصر من عناصر الصف الأول أو العمود الأول، ويتم ذلك بالإلغاء عناصر الصف وعناصر العمود الذي يقع فيهما العنصر، بحيث يكون المرافق هو العنصر المتبقي.

3- إيجاد قيمة المحدد . والمثال الآتي يوضح ذلك.

مثال2:



اوجد قيمة المحدد:

$$|W| = \begin{vmatrix} \overset{(+)}{2} & \overset{(-)}{1} & \overset{(+)}{6} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحـــل:

قيمة المحدد (Δ) باستخدام عناصر الصف الأول.

$$\Delta_W = +(2)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (6)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_W = 2[5\times4 - 2\times7] - 1[3\times4 - 1\times7] + 6[3\times2 - 1\times5]$$

$$= 2(6) - 1(5) + 6(1)$$

$$= 13$$

ويمكن استخدام عناصر العمود الأول لإيجاد قيمة المحدد كما يأتي:

$$\Delta_W = +(2)\times\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - (3)\times\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (1)\times\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

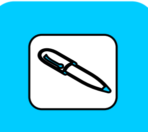
$$= 2[5\times4 - 2\times7] - 3[1\times4 - 2\times6] + 1[1\times7 - 5\times6]$$

$$= 2(6) - 3(-8) + 1(-23)$$

$$= 12 + 24 - 23$$

$$= 13$$

وهي نفس القيمة التي تم التوصل إليها باستخدام عناصر الصف الأول. وبناءً عليه فإنه لإيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة باستخدام مرافقات العناصر، يتم استخدام عناصر احد صفوف المحدد أو عناصر أحد الأعمدة.



تدريب (2)

أوجد قيمة:

$$(a)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

أوجد قيمة:

1-المحدد (a) باستخدام عناصر الصف الأول.

2-المحدد (b) باستخدام عناصر العمود الأول.

$$(a)\ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

ثانياً: استخدام قاعدة ساروس (Sarrus Rule)

تعمل قاعدة ساروس لإيجاد قيمة المحدد من الدرجة الثالثة وفقاً للخطوات الآتية:

1-يتم , وضع العمود الأول والثاني خارج المحدد وعلى اليمين منه.

2-يتم تحديد الأقطار الرئيسية بثلاثة أسهم من الشمال إلى اليمين (من الأعلى إلى الأسفل)، وتعطى لكل منها الإشارة الجبرية (+).

3-تحدد الأقطار الفرعية من خلال ثلاثة أسهم من الأسفل إلى الأعلى، وتعطى لكل منها الإشارة الجبرية (-). والمثال الآتي يوضح عمل هذه القاعدة.

مثال3:

باستخدام قاعدة ساروس أوجد قيمة المحدد:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

الحـــل:

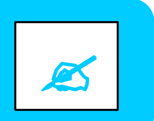
(-) (-) (-)

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{11}	a_{12}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{21}	a_{22}
a_{31}	a_{32}	a_{32}	a_{31}	a_{32}

(+) (+) (+)

$$\therefore \Delta_A \{a_{11} \times a_{22} \times a_{32} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{13} \times a_{21} \times a_{32}\}$$
$$-\{a_{31} \times a_{22} \times a_{13} + a_{32} \times a_{23} \times a_{11} + a_{32} \times a_{21} \times a_{12}\}$$

مثال4:

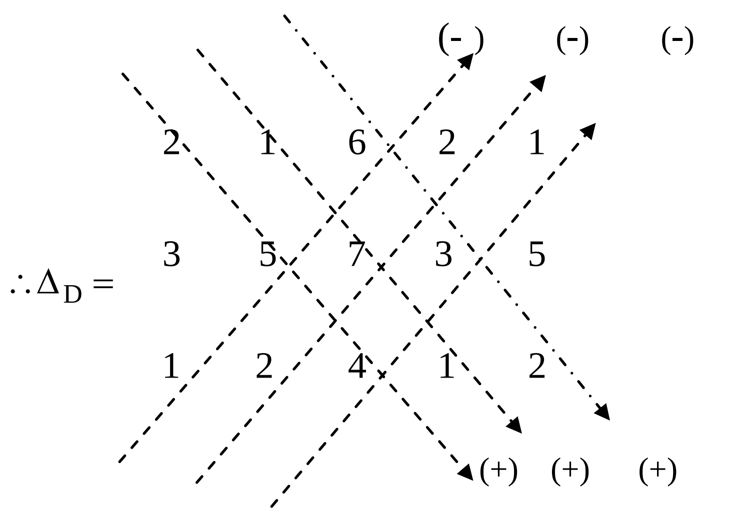


مستخدماً قاعدة ساروس أوجد قيمة المحدد الآتي :

(+) (−) (+)

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحــل:



$$\therefore \Delta_D = \{2\times5\times4+1\times7\times1+6\times3\times2\}-\{1\times5\times6\times+2\times7\times2+4\times3\times1\}$$
$$=\{40+7+36\}-\{30+28+12\}$$
$$=83-70=13$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها في مثال 2 باستخدام الطريقة العامة:

تدريب (3)

باستخدام قاعدة ساروس أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

باستخدام قاعدة ساروس أوجد قيمة المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

4.2. خواص المحددات:

للمحددات عدد من الخصائص التي يساعد فهمها في تسهيل حل المحددات. ونوجز فيما يأتي أهم هذه الخصائص.

الخاصية الأولى:

إذا احتوى محدد ما على صف أو عمود جميع عناصره أصفاراً، فإن قيمة مفكوك هذا المحدد تساوي صفراً.

مثال5:

أوجد قيمة مفكوك المحدد الأتي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

الحـــل:

باستخدام عناصر الصف الأخير في إيجاد قيمة المحدد، نجد أن:

$$\therefore \Delta_A = 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0(2-12) - 0(3-20) + 0(9-10)\square$$

$$= 0$$

ملاحظة:

يمكن الوصول إلى النتيجة السابقة باستخدام الخاصية السابقة مباشرة بدون إيجاد المفكوك، بمعنى يتم تطبيق الخاصية مباشرة.

الخاصية الثانية:

إذا احتوى محدد ما على صفين أو عمودين متطابقين فإن قيمة المحدد تساوي صفراً.

فمثلاً المحدد:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

حيث تطابق فيه عناصر الصف الأول والصف الثاني. وباستخدام عناصر الصف الأول؛ نجد أن:

$$\Delta = 2(6-1) - 3(4-3) + 1(2-9) = 0$$

ويمكن الوصول إلى النتيجة السابقة باستخدام الخاصية السابقة مباشرة وبدون إيجاد المفكوك.

الخاصية الثالثة:

إذا تبادل صفان أو عمودان متجاوران موضعيهما ، فإن قيمة المحدد الجديد تساوي قيمة المحدد الأصلي (قبل تبادل الصفين أو العمودين) ولكن بإشارة مخالفة.

فمثلاً المحدد:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta_A = 1(-3-20)$$

$$= -23$$

وبإحلال عناصر الصف الأول والثاني كل مكان الأخر، نحصل على المحدد الجديد الآتي :

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore A_B = -1(-3-20) = -1(-23)$$

$$= 23$$

نلاحظ أن قيمة المحدد قبل إحلال الصف الأول مكان الصف الثاني = قيمة المحدد بعد إحلال الصف الأول مكان الصف الثاني ولكن بإشارة مخالفة.

$$\therefore -|A| = +|B|$$

الخاصية الرابعة:

إذا استبدلت الصفوف بالأعمدة أو الأعمدة بالصفوف في محدد ما فإن قيمة المحدد لا تتغير.

فمثلاً المحدد:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta_A = (15 - 8)$$
$$= 7$$

وبفرض أنه تم تحويل الصفوف إلى أعمدة، نحصل على المحدد الأتي:

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta_B = (15 - 8)$$
$$= 7$$

يلاحظ أن قيمة المحدد لم تتغير بعد أن تم تحويل الصفوف إلى أعمدة.

الخاصية الخامسة:

إذا احتوت عناصر أي صف أو عمود في محدد ما على عامل مشترك، فإن قيمة هذا المحدد تساوي العامل المشترك مضروباً في مفكوك المحدد.

وتتضح صحة هذه الخاصية من ملاحظة أنه لو كان لدينا المحدد:

$$|D| = \begin{vmatrix} Ka_1 & Kb_1 & Kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

فيلاحظ أن عناصر الصف الأول تحتوي على الثابت k، وبالتالي فإنه يتم أخذ هذا الثابت كعامل مشترك وإيجاد قيمة المحدد كمل يأتي:

$$\Delta_D = K \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad , \quad K \neq 0$$

يتم إيجاد قيمة المحدد وضربه في الثابت K.

أمثلة عامة:

1-بدون فك المحدد بيّن أن:

$$\begin{vmatrix} a^2 & x & a \\ ab & y & b \\ ac & d & c \end{vmatrix} = 0$$

تحليل السؤال:
بالنظر إلى العمود الأول في المحدد، نلاحظ وجود عامل مشترك "a" بين عناصره.

الحل:

إذن الطرف الأيسر من المحدد يساوي:

$$a \times \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & d & c \end{vmatrix}$$

يلاحظ أنه تم أخذ العنصر "a" في العمود الأول كعامل مشترك. ووفقا للخاصية الثانية فإن قيمة المحدد= صفر نظراً لتساوي العمود الأول والعمود الثالث:

$$a \times \begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & d & c \end{vmatrix} = 0$$

2-بدون فك المحدد اثبت أن:

$$\begin{vmatrix} c-1 & c+1 & c \\ a+1 & a-1 & a \\ b-1 & b+1 & b \end{vmatrix} = 0$$

الحل:

بإضافة عناصر العمود الثاني إلى العمود الأول ينتج ما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 2c & c+1 & c \\ 2a & a-1 & a \\ 2b & b+1 & b \end{vmatrix}$$

يتم أخذ العدد 2 كعامل مشترك من العمود الأول ينتج ما يأتي:

$$2 \times \begin{vmatrix} c & c+1 & c \\ a & a-1 & a \\ b & b+1 & b \end{vmatrix} = 0$$

حيث نلاحظ أن عناصر العمود الأول في المحدد تساوي عناصر العمود الثالث، وبالآتي فإن قيمة المحدد تنعدم.

3- تنعدم قيمة المحدد إذا تساوى فيه صفان أو عمودان . حقق هذه الخاصية إذا كانت:

$$A = \begin{vmatrix} 4a^2 & x & 2a \\ 6ab & y & 3b \\ 2ac & w & c \end{vmatrix}$$

الحــل:

نلاحظ أنه يوجد عامل مشترك في العمود الأول هو العامل $2a$ وبأخذه كعامل مشترك ينتج ما يأتي:

$$2a \times \begin{vmatrix} 2a & x & 2a \\ 3b & y & 3b \\ c & w & c \end{vmatrix}$$

وبالنظر إلى عناصر العمود الأول وعناصر العمود الثالث، نلاحظ أن هناك تساوياً بين عناصر هذين العمودين، ووفقاً للخاصية الثانية فإن قيمة المحدد تساوي صفراً.

مثال: أوجد قيمة X في المحدد التالي ثم بين أن قيمته تساوي صفراً:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & x \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & x & 3 \end{vmatrix} = 0$$

الحــل:

يلاحظ أن المحدد يمثل معادلة طرفها الأيمن يساوي صفراً. وبناءً علية فإنه يتم فك المحدد باستخدام عناصر الصف الأول بالطريقة العامة ومساواتها بالصفر.

$$\left[2(15-5x)-2(15-15)+x(5x-15)\right]=0$$

$$5x^2-25x+30=0$$

$$\therefore x^2-5x+6=0$$

يلاحظ أن الناتج معادلة من الدرجة الثانية، وعليه فانه يتم إيجاد قيمة x

باستخدام التحليل كما يأتي:

$$(x-3)(x-2)=0 \qquad \therefore x-3=0 \rightarrow x=3 \quad , \quad x=2$$

بالتعويض عن قيمة $x=2$ أو $x=3$ في المحدد:

❖عند التعويض بقيمة $x=2$ ينتج ما يأتي:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

أذن عناصر العمود الأول تساوي عناصر العمود الثالث، وبالآتي فإن قيمة المحدد تساوي صفراً.

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0$$



تدريب (4)



بدون فك المحدد، بين أن قيمة المحددات التالية تساوي صفراً.

$$(a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 6 & 5 \end{vmatrix} \qquad (c)\begin{vmatrix} a+1 & a-1 & a \\ c-1 & c+1 & c \\ b-1 & b+1 & b \end{vmatrix}$$

أسئلة التقويم الذاتي (4)

?

مستخدماً خواص المحددات، بين أن قيمة المحددات التالية تساوي صفراً.

$$(a)\begin{vmatrix} w^3 & 1 & w \\ w^2b & 2 & b \\ w^2c & 3 & c \end{vmatrix} \qquad (b)\begin{vmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad (c)\begin{vmatrix} a+2 & a-2 & a \\ c-2 & c+2 & c \\ d-2 & d+2 & d \end{vmatrix}$$

3. الخلاصة:

ركزت هذه الوحدة على المحددات، من حيث تعريف المحدد ورتبته، وبينت أن هناك رتباً مختلفة للمحدد تتحدد هذه الرتب بناءً على عدد الصفوف وعدد الأعمدة.

كما تناولت الوحدة أيضاً أسلوب إيجاد قيمة المحدد من الدرجة:

1. الثانية. 2. الثالثة، وذلك باستخدام الطريقة العامة.

وتطرقت الوحدة إلى أسلوب قاعدة ساروس لإيجاد قيمة المحدد من الرتبة الثالثة.

كما تم استعراض خواص المحددات وتسليط الضوء على مدى أهمية تلك الخواص للمساعدة في إيجاد قيمة المحدد مباشرة دون فك المحدد.

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية السادسة:

عزيزي الدارس، بعد دراستك للوحدة الخامسة (المحددات)، أصبحت قادراً على تعريف المحدد وتحديد رتبه المختلفة، بالإضافة إلى إيجاد قيمته في الرتبة الثانية والثالثة.

وتأتي الوحدة السادسة كامتداد للوحدة الخامسة، حيث سنتعرض لتعريف المصفوفات ودرجاتها المختلفة بالإضافة إلى أنواع تلك المصفوفات.

وسنوضح في هذه الوحدة أيضاً أهم العمليات الجبرية على المصفوفات بالإضافة إلى إيجاد قيمة محدد المصفوفة.

5. إجابات التدريبات:

تدريب (1):

$$(a): \Delta = [5\times 2]-[7\times 3]$$
$$= 10-21$$
$$= -11$$

$$(b): \Delta = [-2\times 1]-[-3\times 3]$$
$$= -2+9$$
$$= 7$$

□

تدريب (2):

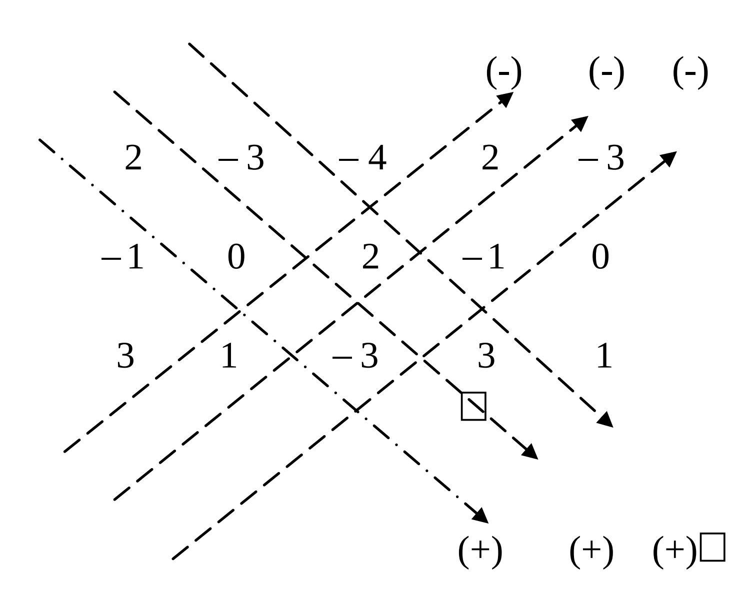
باستخدام عناصر الصف الأول:

$$(a): \Delta = 1\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1[(5\times 3)-(0\times 4)] - 0[(2\times 3)-(1\times 4)] + 3[(2\times 0)-(1\times 5)]$$
$$= \quad 15 \quad - \quad 0 \quad - \quad 15$$
$$= 0$$

$$(b): \Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 2[(0\times -3)-(5\times 2)] + [(-1\times -3)-(3\times 2)] - 4[(-1\times 5)-(3\times 0)]$$
$$= \quad -20 \quad -3 \quad + \quad 20$$
$$= -3$$

□

تدريب (3):



$$\therefore \Delta = [(2\times 0\times -3)+(-3\times 2\times 3)+(-4\times -1\times 1)] - [(3\times 0\times -4)+(1\times 2\times 2)+(-3\times -1\times -3)]$$

$$\therefore \Delta = \quad -14 \quad + \quad 5$$

$$\therefore \Delta = -9$$

تدريب (4):

يلاحظ أن عناصر العمود الأول تتطابق مع عناصر العمود الثالث وبالآتي فإن قيمة المحدد = صفراً.

(a): $\therefore \Delta = 0$

(b):

من العمود الأول يتم أخذ عامل مشترك العدد 2:

$$\therefore \Delta = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

وبالنظر إلى العمود الأول والعمود الثاني، نلاحظ أن العمودين متطابقان وبالآتي فإن قيمة المحدد = صفراً.

$$\therefore \Delta = 2\times 0 = 0$$

(c) :

بإضافة عناصر العمود الثاني إلى عناصر العمود الأول ينتج ما يأتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+1)+(a-1) & a-1 & a \\ (c-1)+(c+1) & c+1 & c \\ (b+1)+(b-1) & b-1 & b \end{vmatrix}$$

وباختصار عناصر الصف الأول ينتج ما يأتي:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & a-1 & a \\ 2c & c+1 & c \\ 2b & b+1 & b \end{vmatrix}$$

وبالنظر إلى عناصر العمود الأول، نلاحظ أن هناك عاملاً مشتركاً هو العدد 2 :

$$\therefore \quad \Delta = 2\begin{vmatrix} a & a-1 & a \\ c & c+1 & c \\ b & b+1 & b \end{vmatrix}$$

يلاحظ أن عناصر العمود الأول تتطابق مع العمود الثالث، وبالآتي فإن قيمة المحدد = صفراً.

$$\therefore \Delta = 2 \times 0 = 0 \quad \square$$

6. المراجع:

1. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
2. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
3. .الوحيشي، جمال أحمد (2010) الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء، الجمهورية اليمنية.
4. حسن، سعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
5. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
6. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة

7. التعيينات:

السؤال الأول:

بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ C & a & b \\ ab & bC & Ca \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ C & a & b \\ C^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

السؤال الثاني:

بدون فك المحدد أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} bC & a & a^2 \\ Ca & b & b^2 \\ ab & C & C^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & C^2 & C^3 \end{vmatrix} \square$$

السؤال الثالث:

أوجد قيمة المحدد:

$$\text{(a):} \begin{vmatrix} bC & a & a^2 \\ Ca & b & b^2 \\ ab & C & C^2 \end{vmatrix} \qquad \text{(b):} \begin{vmatrix} 7 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

الوحدة السادسة 6

المصفوفات

محتويات الوحدة

1. المقدمـــــة:

1.1. تمهيد :

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة (المصفوفات) والتي تتألف من خمسة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بتعريف المصفوفة، وخلفية عامة.

ويتناول القسم الثاني درجة المصفوفة ومدى أهميته في تعريف المصفوفة .

ويُركز القسم الثالث على أنواع المصفوفات .

أما القسم الرابع فيتناول العمليات الجبرية على المصفوفات.

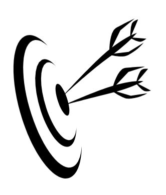
ويتناول القسم الخامس إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة الثانية والثالثة متضمناً أمثلة توضيحية تغطي مفردات القسم.

وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب مفهوم المصفوفات. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

1. 2. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية السادسة وهي بعنوان " المصفوفات " والذي يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تُعرّف المصفوفات.
2. تعرف المصفوفات من الدرجة الثانية.
3. تحسب قيمة المصفوفات من الدرجة الثانية.
4. تُعرّف المصفوفات من الدرجة الثالثة.
5. تحسب قيمة المصفوفات من الدرجة الثالثة.
6. توضح الفرق بين المصفوفات من الدرجة الثانية والثالثة.
7. تشرح أهمية خواص المصفوفات لإيجاد قيمة المحدد.



3.1. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من خمسة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث أرتبط القسم الأول بالهدف الأول، والذي يركز على تعريف المصفوفة من حيث المفهوم ودرجته.

وفي القسم الثاني تناولنا إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة الثانية وهذا يحقق الهدف الثاني والثالث.

أما في القسم الثالث فقد تم التركيز على أنواع المصفوفات ومدى أهميتها.

وتم في القسم الرابع تناول العمليات الجبرية على المصفوفات وبينا فيه مدى أهمية تلك العمليات الجبرية.

وفي القسم الخامس والأخير تناولنا إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة الثانية والثالثة وهذا يحقق الهدف السادس.

4.1. القراءات المساعدة:



تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، أمل عزيزي الدارس أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
3. الوحيشي، جمال أحمد (2010) الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة،منشورات مركزا لأمين، صنعاء، الجمهورية اليمنية.
4. حسن، سعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
5. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
6. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة والتقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاءً من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلى التأكد من تهيئة المكان الملائم للدراسة ولديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. المصفوفات :

2 .1. مقدمة:

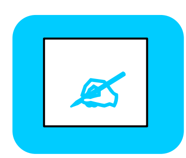
إن دراسة المبادئ الأساسية للمصفوفات أصبحت تشكل جانباً مهماً من الخلفية الرياضية للدارسين في مجال الاقتصاد والإحصاء والعلوم الإدارية عموماً، حيث يتعامل الباحث في كثير من مجالات البحث العلمي مع مجموعة من العناصر المرتبة في شكل صفوف وأعمدة، فإذا وضعت هذه العناصر في صفوف وأعمدة بين قوسين على الصورة [ ] أو الصورة ( ) سميت مصفوفة " Matrix ".

2 .2. تعريف المصفوفة:

المصفوفة هي مجموعة من العناصر المرتبة في عدد m من الصفوف وعدد n من الأعمدة، ويمكن كتابة المصفوفة على الصورة:

$$A = [\; a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n} \;]$$

أو الصورة:



$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث:

a_{ij} : ترمز إلى العنصر الذي يقع في الصف (i) والعمود (j) من المصفوفة.

$$i = 1, 2, \ldots, m \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

والمصفوفة A تتكون من صف واحد وعدد n من الأعمدة، والمصفوفة B تتكون من عدد m من الصفوف وعدد n من الأعمدة. وسوف نستخدم حروفاً مثل:

$A , B , C , \ldots$ لكي ترمز للمصفوفة

وحروفاً مثل:

$a , b , c , \ldots$ لكي ترمز لعناصر المصفوفة

3.2. رتبة المصفوفة:

نستخدم مصطلح رتبة المصفوفة للدلالة على عدد الصفوف وعدد الأعمدة في المصفوفة.

تعريف:

إذا كانت المصفوفة B تحتوي على عدد m من الصفوف وعدد n من الأعمدة، فإن رتبة المصفوفة B هي ($m \times n$).

فالمصفوفة:

$D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة من الرتبة (3×1) .

حيث يلاحظ أنها تتكون من 3 صفوف وعمود واحد.

والمصفوفة:

$$B=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ هي مصفوفة من الدرجة (2×2)

لأنها تتكون من صفين وعمودين.

4.2. أنواع المصفوفات:

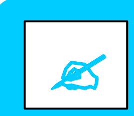
هناك الكثير من المصفوفات التي لها أهمية خاصة أهمها:

1.4.2. المصفوفة القُطرية:

تعريف:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفارٌ ماعدا عناصر القطر الرئيسي، فإنها تساوي قيماً غير متساوية.

أي أن: $a_{ij}=0 \quad , \quad i\neq j$



مثال1:

المصفوفة $$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$ مصفوفة قطرية من الرتبة (3×3)

وعناصر القطر الرئيسي هي: $a_{11}=3\ ,\ a_{22}=1\ ,\ a_{33}=-2$

2.4.2. مصفوفة الوحدة:

تعريف:

تسمى المصفوفة بمصفوفة الوحدة إذا كانت جميع عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد صحيح. أي أن:

$$a_{ij}=1 \quad , \quad i=j$$



مثال2:

المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ مصفوفة الوحدة من الرتبة (3×3).

3.4.2. المصفوفة القياسية:

تعريف:

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفارٌ ماعدا عناصر القطر الرئيسي فأنها تساوي مقدار ثابت K. أي أن:

$$a_{ij} = 0 \ , \ i = j \quad , \ a_{ij} = k \ , \ i = j$$



مثال3:

المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة قياسية من الرتبة (3×3)

وعناصر القطر الرئيسي هي: $a_{11} = 2 \ , \ a_{22} = 2 \ , \ a_{33} = 2$

4.4.2. المصفوفة المتماثلة:

تعريف:

هي مصفوفة مربعة تتساوى فيها العناصر المتناظرة أعلى وأدنى القطر الرئيسي.

مثال4:

المصفوفة $B=\begin{pmatrix}4&3&2\\3&5&-8\\2&-8&6\end{pmatrix}$ هي مصفوفة متماثلة. أي أن:

$$a_{12}=a_{21}\ ,\ a_{13}=a_{31}\ ,\ a_{23}=a_{32}$$

5.4.2. المصفوفة المبدلة:

تعريف:

إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $(m\times n)$، فان المصفوفة A^T هي مصفوفة من الرتبة $(n\times m)$ والناتجة من وضع صفوف المصفوفة A أعمدة في المصفوفة A^T. أي أن $a_{ij}=a_{ji}$ لجميع قيم: $j=1,2,\dots,m$, $i=1,2,\dots,n$

مثال5:

المصفوفة $B=\begin{bmatrix}4&-2&3&1\\5&7&5&9\\6&0&2&3\end{bmatrix}$ مصفوفة من الرتبة (3×4)،

والمصفوفة المُبدلة B هي مصفوفة B^T من الرتبة (4×3) حيث:

$$B^T=\begin{bmatrix}4&5&6\\-2&7&0\\3&5&2\\1&9&3\end{bmatrix}$$

يُلاحظ أن الصف الأول في المصفوفة B هو العمود الأول في المصفوفة B^T.

وهذا ينطبق على الصفوف الأخرى.

6.4.2. المصفوفة المثلثية:

تعريف:
تسمى المصفوفة المربعة التي جميع عناصرها أسفل القطر الرئيسي أصفار بالمصفوفة المثلثية العليا، وفي المقابل فإن المصفوفة التي جميع عناصرها أعلى القطر الرئيسي أصفار تسمى بالمصفوفة المثلثية السفلى.

مثال6:

المصفوفة $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -8\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$ هي مصفوفة مثلثية عليا لأن جميع العناصر أسفل القطر الرئيسي تساوي صفراً. والمصفوفة:

$C=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 7 & 5 & 0\\ 9 & 3 & 6\end{pmatrix}$ هي مصفوفة مثلثية سفلى لأن جميع العناصر أعلى القطر الرئيسي تساوي صفراً.

5.2. العمليات الجبرية على المصفوفات:

تشتمل العمليات الجبرية على المصفوفات: تساوي المصفوفات، عمليات الجمع، وطرح وضرب المصفوفات. وسوف نتناول هذه العمليات الجبرية على النحو الآتي:

1.5.2. تساوي المصفوفات:

تعريف:

إذا كانت B , A **مصفوفتين لهما نفس الرتبة وكان** $a_{ij} = a_{ij}$ **لجميع قيم** i **و** j **فإن:** $A = B$

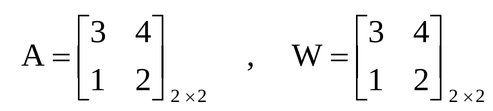
من التعريف السابق نجد أن خاصية التساوي تتحقق إذا تحقق شرطان:

أ-عدد الصفوف والأعمدة في المصفوفتين متساوية.

بـ-العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوية.

مثال7:

إذا كانت لدينا المصفوفتان:



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad W = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

يُلاحظ أن المصفوفتين من نفس الرتبة (2×2) وأن جميع العناصر المتناظرة متساوية، وبالتالي فإن المصفوفتين متساويتان.

2.5.2. جمع المصفوفات:

تعريف:

إذا كانت B , A **مصفوفتين من الرتبة** $(m\times n)$**، فإن المصفوفة الجديدة:** $D = A + B$

مصفوفة من الرتبة $m\times n$ **، حيث:** $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ **لجميع قيم** i, j.

يُلاحظ من خلال التعريف أن عملية الجمع تتم بين جميع العناصر المتقابلة في مصفوفتين لهما نفس الرتبة، وتمثل نتيجة الجمع عناصر المصفوفة الجديدة.

مثال8:

إذا كانت لدينا المصفوفتان:

$$W=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 3\end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

فأوجد $(A+W)$.

الحل:

المصفوفتان W , A لهما نفس الرتبة وهي 2×2 ، لذلك يمكن إجراء عملية الجمع عليهما على النحو الأتي:

$$C=A+W=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 6 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+1 & 4+2\\ 1+6 & 5+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$$

3.5.2. طرح المصفوفات:

تعريف:

إذا كانت B , A **مصفوفتين من الرتبة** $(m\times n)$، **فإن لمصفوفة الجديدة:**

$$C=A-B$$

مصفوفة من الرتبة $m\times n$ ، **حيث:** $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ **لجميع قيم** i,j.

مثال9:



إذا كانت لدينا المصفوفتان:

$$W=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 7 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad D=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 9 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2}$$

فأوجد قيمة: (D-W)

الحل:

المصفوفتان W , D لهما الرتبة نفسها وهي (2×2)، لذلك يمكن إجراء عملية الطرح عليهما على النحو الأتي:

$$B = D - W = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-4 & 6-2 \\ 9-7 & 1-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

4.5.2. ضرب المصفوفات:

يشترط لإجراء عملية ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى أن يكون عدد الأعمدة في الأولى يساوي عدد الصفوف في الثانية.

تعريف:

إذا كان لدينا المصفوفة A من الدرجة $(m \times n)$ والمصفوفة B من الدرجة $(n \times p)$ فإن ناتج الضرب يعطي مصفوفة جديدة: $D = A \times B$ من الدرجة $(m \times p)$.

ويوضح لنا التعريف السابق أن عملية الضرب تتم عندما يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية. ويوضح المثال الآتي إجراء عملية ضرب مصفوفتين.

مثال10:



إذا كنت لدينا المصفوفتان:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}_{(3\times2)} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{(2\times3)}$$

فأوجد: $(A \times B)$.

الحل:

يلاحظ أن المصفوفة A من الدرجة (3×2) والمصفوفة B من الدرجة (2×3)، وبناء عليه فإن عملية الضرب ممكنة في هذه الحالة، وذلك لأن عدد الأعمدة في المصفوفة A مساوياً لعدد الصفوف في المصفوفة B.
وتكون المصفوف الناتجة من الدرجة (3×3).

$$A\times B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 2 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(3\times1)+(0\times1) & (3\times4)+(0\times0) & (3\times2)+(0\times5)\\ (2\times1)+(-1\times1) & (2\times4)+(-1\times0) & (2\times2)+(-1\times5)\\ (4\times1)+(-2\times1) & (4\times4)+(-2\times0) & (4\times2)+(-2\times5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 12 & 6\\ 1 & 8 & -1\\ 2 & 16 & -2\end{bmatrix}$$

1- ضرب الصف الأول من المصفوفة الأولى في العمود الأول من المصفوفة الثانية.
2- ضرب الصف الثاني من المصفوفة الأولى في العمود الأول من المصفوفة الثانية.
3- ضرب الصف الثالث من المصفوفة الأولى في العمود الأول من المصفوفة الثانية.
وهكذا..........

تدريب (1)

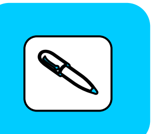
إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 3 & \\ 5 & -4 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1- بيّن أن: A , B تقبلان الضرب.

2-اوجد $A\times B$ ، ثم اذكر نوع المصفوفة الناتجة.

تدريب (2)



أوجد قيم كل من (a , b , c) حتى تكون المصفوفة الآتية متماثلة:

$$A=\begin{pmatrix}2 & a & b\\ 4 & 3 & c\\ 6 & -7 & 5\end{pmatrix}$$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

السؤال الأول: إذا كانت:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \quad , \quad B=2\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&-4\\0&-3&0\end{pmatrix}$$

المطلوب: بين أن: (A , B) تقبلان الضرب، ثم اذكر نوع المصفوفة الناتجة.

السؤال الثاني: مستخدماً خواص المصفوفات أوجد قيمة كلٍ من:

.(a , b , c , d)

$$\begin{pmatrix}6a&a+b\\15&2a+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&10\\a+c&d\end{pmatrix}$$

6.2. إيجاد قيمة محدد المصفوفة:

سنتناول في هذا البند إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة (2×2) ومن الدرجة (3×3) على النحو الأتي:

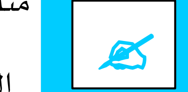
1.6.2. إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة (2×2)

تعريف:

إذا كانت لدينا المصفوفة $B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ ، فإن قيمة المحدد:

$$\Delta_B=(a_{11}\times a_{22})-(a_{21}\times a_{12})$$

يُلاحظ أننا استخدمنا الرمز Δ_B للتعبير عن محدد المصفوفة B.



مثال11: أوجد قيمة محدد المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}$$

الحل:

$$\Delta_A=(2\times 4)-(1\times -3)$$
$$=8+3=11$$

2.6.2. إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة (3×3)

تعريف:

إذا كانت لدينا المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ **فإن:**

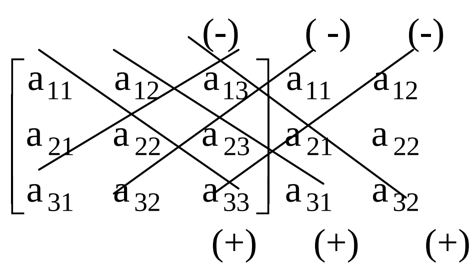
$$\Delta_A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

يُلاحظ أنه تم تكوين محددات من الدرجة الثانية باستخدام عناصر الصف الأول ومن ثم نحسب العوامل المرافقة لعناصر هذا الصف.

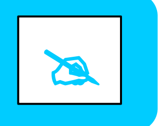
وهناك طريقة أخرى لإيجاد قيمة محدد المصفوفة ذات الدرجة الثالثة يطلق عليها قاعدة ساروس، وأسلوبها:

1- يتم نقل العمود الأول والعمود الثاني على يمين المصفوفة .

2- تحديد الأقطار الرئيسة والفرعية بثلاثة أسهم من الأعلى للأقطار الرئيسية وثلاثة أسهم من الأسفل إلى الأعلى للأقطار الفرعية.



وقد تم تناول هذه القاعدة بالشرح والتحليل في الوحدة الخامسة.



مثال12:

إذا كانت لدينا المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{matrix}$ فأوجد قيمة: Δ_A

الحل: باستخدام قاعدة ساروس:

$$\Delta_A = [(1\times3\times5)+(2\times1\times2)+(-1\times0\times0)] - [(2\times3\times-1)+(0\times1\times1)+(5\times0\times2)]$$

$$\Delta_A = [15+4]-[-6]$$

$$= 19+6 = 25$$

7.2. العامل المرافق:

تعريف:

العامل المرافق للعنصر a_{ij} من المصفوفة A هو:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \quad \Delta_*$$

العامل المرافق لأي عنصر (a_{ij}) من عناصر المصفوفة، هو عبارة عن المحدد (Δ_*) بعد إلغاء عناصر الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر، ويكون العامل المرافق هو العنصر الباقي.

ويتوقف نوع الإشارة التي تسبق مرافق أي عنصر على كون مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما هذا العنصر زوجياً أو فردياً وفقاً للقاعدة الآتية:

إذا كان مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر زوجياً كانت الإشارة موجبة (+)، أما إذا كان مجموع ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر فردياً كانت الإشارة سالبة (-).

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \quad \Delta_*$$

حيث:

c_{ij} : مرافق العنصر.

ij : ترتيب الصف والعمود الواقع فيهما العنصر.

Δ_* : محدد العنصر (a_{ij}) بعد حذف الصف (i) والعمود (j) الواقع فيهما العنصر.

3. الخلاصة:

ركزت هذه الوحدة على المصفوفات، من حيث التعريف والدرجة، وبينت أن هناك درجات مختلفة للمصفوفة تستخدم للدلالة على عدد الصفوف وعدد الأعمدة. كما تناولت الوحدة أنواع المصفوفات التي لها أهمية خاصة تساعد في تحليل المصفوفات.

وتطرقت الوحدة أيضاً إلى أسلوب العمليات الجبرية على المصفوفات، المتمثل في عمليات التساوي، الجمع والطرح وضرب المصفوفات.

كما تناولت الوحدة أيضاً إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة الثانية والثالثة، باستخدام الطريقة العامة وقاعدة ساروس.

وتضمنت الوحدة بالشرح والتحليل أمثلة متنوعة تغطي المواضيع المختلفة التي تم تناولها، بالإضافة إلى التدريبات، وأسئلة التقويم الذاتي والتعيينات.

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية السابعة:

عزيزي الدارس، بعد دراستك للوحدة السادسة (المصفوفات)، أصبحت قادراً على تعريف المصفوفة وتحديد درجاتها المختلفة، بالإضافة إلى إيجاد قيمة محدد المصفوفة من الدرجة الثانية والثالثة.

وفي هذه الوحدة سنتناول أسلوب حل المعادلات الجبرية في حالة متغير واحد ومتغيرين باستخدام الحذف والتعويض، وحل معادلة الدرجة الثانية باستخدام التحليل والقانون العام. بالإضافة إلى استخدام أسلوب المحددات- **قاعدة كرامر**- والمصفوفات في حل المعادلات الخطية في حالة متغيرين وثلاثة متغيرات.

5. إجابات التدريبات:

تدريب (1):

$$(1)\ \because \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}_{(3\times3)} \quad , \quad \because \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(3\times3)}$$

❖ يلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية وبالتالي فإن B , A تقبلان الضرب.

$$(2)\ A\times B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -3 & 12 & 0 \\ 15 & -16 & 1 \end{pmatrix}$$

❖ نوع المصفوفة مثلثيه سُفلى.

تدريب (2):

$$\because a = 4 \quad , \quad b = 6 \quad , \quad c = -7$$

□

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & -7 \\ 6 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

6. المراجع:

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
3. الوحيشي، جمال أحمد (2010) الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء، الجمهورية اليمنية.
4. حسن، سعيد احمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
5. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
6. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

7. التعيينات

السؤال الأول:

1- أوجد قيمة كل من X_1, X_2, X_3, X_4 :

$$\begin{pmatrix} 4X_1 & X_1+X_3 \\ 10 & 4X_3+X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ X_1+X_2 & X_4 \end{pmatrix}$$

2- إذا كانت:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

فأوجد المصفوفة D حيث:

$$D = A^2 + 3B - 2C$$

3- أكمل عناصر المصفوفة A لتكون متماثلة:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & .. & .. \\ -8 & 6 & .. \\ 12 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

السؤال الثاني:

1- إذا كانت:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & a & b \\ -6 & 8 & c \\ 7 & -12 & 9 \end{pmatrix}$$

فأوجد a , b , c حتى تكون المصفوفة متماثلة:

2- أوجد قيمة كل من العددين الحقيقيين Y , X اللذين يحققان المعادلة:

$$\begin{pmatrix} X & 3 \\ 2Y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2-2 & X+Y^2 \\ 1+Y^2 & X-Y \end{pmatrix}$$

3- أوجد مصفوفة العوامل المرافقة للمصفوفة A :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

7 الوحــدة السابعة

المعــــادلات الجبريـــــة

محتويات الوحدة

1. المقدمة:

1.1. تمهيد :

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة (المعادلات الجبرية) والتي تتألف من خمسة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بالمجموعات، وخلفية عامة عنها.

ويتناول القسم الثاني تعريف المعادلة الخطية، والصورة العامة لها -في حالة متغير واحد- وأسلوب حلها متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن عزيزي الطالب، من استيعاب أسلوب حل هذا النوع من المعادلات واستخدامه في الحياة العملية.

ويُركز القسم الثالث من هذه الوحدة على المعادلات الخطية في حالة متغيرين وطرق حل تلك المعادلات باستخدام الحذف والتعويض.

أما القسم الرابع فيتناول معادلات الدرجة الثانية وطرق حلها باستخدام التحليل والقانون.

ويتناول القسم الخامس حل المعادلات الخطية في حالة مجهولين وثلاثة مجاهيل باستخدام المحددات والمصفوفات. وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب مفهوم المعادلات وطرق حلها. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

2.1. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية السابعة وهي بعنوان " المعادلات الجبرية " ويتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تشرح أهمية المعادلات الجبرية.
2. تعرف المعادلة الخطية.
3. تحسب قيمة المتغير X في المعادلة الخطية ذات المجهول الواحد.
4. تُعرّف المعادلات الخطية في حالة مجهولين.
5. تشرح أسلوب حل المعادلات الخطية باستخدام الحذف والتعويض.
6. تعرف معادلة الدرجة الثانية في حالة مجهول واحد.
7. تشرح أسلوب حل معادلة الدرجة الثانية.
8. تشرح أسلوب حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات.
9. توضح أسلوب حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات.
10. تفرق بين أسلوب حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات والمصفوفات.



3.1. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من خمسة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الأول بالهدف الأول، والذي يركز على المعادلات الخطية.

وفي القسم الثاني تناولنا تعريف المعادلات الخطية، والصورة العامة للمعادلة الخطية في حالة مجهول واحد وأسلوب حلها، وهذا يحقق الهدف الثالث والرابع.

أما في القسم الثالث فقد تم التركيز على المعادلات الخطية في حالة مجهولين وأسلوب حلها باستخدام الحذف والتعويض، وبهذا تحقق الهدف الخامس والسادس.

وتم في القسم الرابع تناول معادلات الدرجة الثانية في حالة متغير واحد، حيث بينا في هذا القسم أسلوب حل تلك المعادلات باستخدام التحليل والقانون، وفي القسم الخامس تناولنا أسلوب المحددات والمصفوفات لحل المعادلات الخطية في حالة متغيرين وثلاثة متغيرات.

4.1. القراءات المساعدة:

تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، آمل -عزيزي الدارس- أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.

1. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية ، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود ، الرياض: المملكة العربية السعودية.

2. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.

3. الوحيشي ، جمال أحمد (2006) ، الرياضيات في العلوم الإدارية، الطبعة الرابعة، ، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.

4. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.

5. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود ، الرياض: المملكة العربية السعودية.

جامعة الملك سعود ، الرياض: المملكة العربية السعودية.



5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالاتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريب التي وردت في هذه

الوحدة والتقويم الذاتي الخاص بها.

- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاء من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلى التأكد من تهيئتك المكان الملائم للدراسة أن يكون لديك دفتر وقلم.
وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. المعادلات الجبرية:

1.2. مقدمة:

من الأسباب المهمة والرئيسة التي تجعلنا نهتم بدراسة الرياضيات هو استخدامها في حل الكثير من المشاكل التي تواجهنا في الحياة العملية، وذلك من خلال تحويل تلك المشاكل إلى نماذج رياضية.

وتعتمد مقدرتنا على التعامل مع النماذج الرياضية على معرفتنا بالمعادلات الرياضية والأساليب المختلفة لحلها. وسنتناول في هذه الوحدة الطرق المختلفة لحل المعادلات الجبرية على النحو الأتي.

2.2. المعادلات الخطية:

تعطي المعادلة دلالة على أن كميتين رياضيتين متساويتان، فعلى سبيل المثال تأمل المعادلة الآتية:

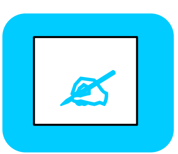
$$8X + 4 = 16X - 8$$

تعريف المعادلة الخطية:

تُعرف المعادلة الخطية بأنها عبارة عن علاقة مساواة بين مقدارين ويمكن كتابتها بالصورة:

$$aX + b = 0$$

حيث: a , b أعداد حقيقية، $a \neq 0$



مثال1:

حل المعادلة: $3x+3=30$

الحـــل:

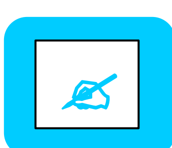
ولتحقيق ذلك، فإنه يتم وضع المجاهيل في طرف وباقي القيم في طرف أخر وكما يأتي

حـل المعادلـة: يعـني البحث عـن قيمة x الـتي تجعـل الطرف الأيمن مساوياً للطرف الأيسر.

$\therefore 3x=30-3$

$\therefore 3x=27 \quad \Rightarrow x=9$

- ❖ نلاحظ أنه تم نقل العدد 3 إلى الطرف الأيمن مع تغيير الإشارة.
- ❖ نقسم الطرفين على 3
- ❖ ويكون حل المعادلة: $x=9$



مثال2:

حل المعادلة:

$5x-10=x+2$

الحـــل:

- ❖ نضع المجاهيل في الطرف الأيسر.

$5x-x=2+10$ □

$\therefore 4x=12$

- ❖ نقسم الطرفين على 4
- ❖ وبذلك يكون حل المعادلة: $x=3$

2.2. 1. طرق حل المعادلات الخطية:

بينا في بداية هذه الوحدة بأن الصورة العامة للمعادلة الخطية ذات المجهول الواحد هي:

$ax+b=0$

وحل هذه المعادلة هو:

$x=\frac{-b}{a}$

أما في حالة التعامل مع المعادلات الخطية التي بها عدد (n) من المجاهيل و (m) من المعادلات فيمكن التعبير عنها في الصورة الآتية:

$$a_{11}X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n = b_1$$
$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n = b_m$$

❖ المجاهيل هي:

$$X_1 , X_2 , \dots , X_n$$

ويشترط لحل هذا النوع من المعادلات أن يكون عدد المجاهيل (n) مساوياً لعدد (m) من المعادلات. ويتم حل هذا النوع من المعادلات إما بطريقة الحذف أو التعويض. وسنتناول هاتين الطريقتين كما يأتي:

2.2 .1 .1 طريقة الحذف:

تتلخص هذه الطريقة ، باستنتاج قيمة أحد المجهولين بدلالة الأخر من كلتا المعادلتين بعد توحيد معاملات أي من المجهولين X أو Y فنحصل على معادلة بمجهول واحد وبحلها فإننا نحصل على قيمة ذلك المجهول ومن ثم يتم التعويض بهذه القيمة بإحدى المعادلتين فيتم الحصول على قيمة المجهول الأخر.

مثال3:



حل المعادلتين:

$$3x + 3y = 12 \qquad (1)$$
$$2x + 9y = 22 \qquad (2)$$

الحل:

❖ بضرب المعادلة (1) × (3−) نحصل على المعادلة الآتية:

$$-9x - 9y = -36 \quad (3)$$

❖ وبجمع المعادلة (2) مع المعادلة (3) ينتج ما يأتي:

$$-9x-9y=-36 \quad (3)$$
$$2x+9y=22 \quad (4)$$

$$-7x=-14 \Rightarrow x=\frac{14}{7}$$
$$x=2$$

❖ بالتعويض عن قيمة $x=2$ في المعادلة الأولى نحصل على قيمة y :

$$3(2)+3y=12 \Rightarrow 6+3y=12$$
$$\therefore 3y=12-6$$
$$\therefore 3y=6 \qquad \therefore y=2$$

❖ وبذلك يكون حل المعادلتين: $\{x=2 \; , \; y=2\}$

وللتحقق من صحة الحل نعوض عن قيم x, y في المعادلة (1):

$\therefore$ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر $3(2)+3(2)=12$



مثال4:

حل المعادلتين:

$$x+3y=19 \quad (1)$$
$$x+13y=59 \quad (2)$$

الحل:

❖ بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) ينتج ما يأتي:

$$x+13y=59 \quad (2)$$
$$-x-3y=-19 \quad (1)$$

$$\therefore 10y=40 \Rightarrow y=\frac{40}{10} \qquad \therefore y=4$$

❖ بالتعويض عن قيمة $y=4$ في المعادلة الأولى نحصل على قيمة x :

$$x+3(4)=19 \Rightarrow x+12=19$$
$$\therefore x=19-12$$
$$\therefore x=7$$

❖ وبذلك يكون حل المعادلتين: $\{x=7 \; , \; y=4\}$

2.1.2.2. طريقة التعويض:

تتلخص هذه الطريقة في إيجاد قيمة أحد المجاهيل بدلالة المجهول الأخر من إحدى المعادلتين، ثم التعويض بهذه القيمة في المعادلة الأخرى فينتج لنا معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد وبحلها نحصل على قيمة ذلك المجهول، ومن ثم يتم التعويض بهذه القيمة الناتجة في أي من المعادلتين فنحصل على قيمة المجهول الأخر.

مثال5:



أوجد حل المعادلتين:

$$2x + 3y = 22 \qquad (1)$$
$$5x - y = 21 \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نستنتج قيمة x كما يأتي:

$$2x = 22 - 3y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{22 - 3y}{2} \qquad (3)$$

❖ بالتعويض عن قيمة x في المعادلة (2) ينتج ما يأتي:

$$5\left(\frac{22-3y}{2}\right) - y = 21$$
$$\therefore \frac{110-15}{2} - y = 21 \qquad (4)$$

❖ بضرب طرفي المعادلة (4) × 2 ينتج ما يأتي:

$$110 - 15y - 2y = 42 \quad \Rightarrow 110 - 42 = 17y$$
$$\therefore 17\,y = 68$$
$$\therefore y = 4$$

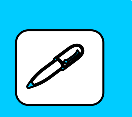
❖ بالتعويض عن قيمة $y = 4$ في المعادلة (3) ينتج ما يأتي:

$$x = \frac{22 - 3(4)}{2} = \frac{22 - 12}{2} \qquad \therefore\ x = 5$$

❖ وبذلك يكون حل المعادلتين: $\{\ x = 5 \quad , \quad y = 4\ \}$

وللتحقيق في ذلك عوض عن قيم x , y في أي معادلة يكون الطرف الأيمن = الطرف الأيسر.

تدريب (1)



السؤال الأول: حل المعادلتين التاليتين:

(a) $2x-6=4$ (b) $10x-8=6+3x$

السؤال الثاني: حل المعادلات الآتية:

(a) $2x_1+x_2=11$, $5x_1-2x_2=-4$

(b) $x+3y=2$, $2x-3y=1$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

?

السؤال الأول:

حل المعادلات الآتية:

(a) $2x+y=4$, $3x+5y=13$

(b) $-x_1+2x_2=11$, $2x_1+3x_2=20$

السؤال الثاني: حل المعادلات الآتية:

$2x+y=14$, $5x+3y=37$

3.2. معادلات الدرجة الثانية:

تعريف معادلة الدرجة الثانية:

المعادلة من الدرجة الثانية هي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصورة:

$$aX^2+bX+C=0$$

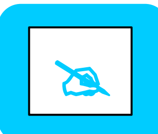
حيث: a , b , C **أعداد حقيقية،** $a\neq 0$

وهناك عدة طرق لحل معادلة الدرجة الثانية من أهمها:

الطريقة الأولى: طريقة التحليل:

تعتمد طريقة التحليل على كتابة المعادلة في صورة مقدارين، حاصل ضربهما يساوي القيمة (C) وحاصل جمعهما يساوي الحد الأوسط (bX).

مثال 6:



حل المعادلة: $x^2 + 13x + 36 = 0$

الحل: (تحليل المثال):

نلاحظ أن معامل x^2 يساوي واحداً صحيحاً، وهذا يعني أن يتم تركيز عملية تحليل المعادلة على الحد المطلق ومعامل x ، ونبدأ عملية التحليل بالبحث عن عددين حاصل ضربهما (36) وهو عبارة عن الحد المطلق ومجموعهما (13) وهو معامل x ، وهذان العددان هما (4)، (9).

وتُحدد إشارة الحد المطلق إشارة العددين، فإذا كانت إشارة الحد المطلق سالبة، فإن إشارة أحد العددين موجبة وإشارة الأخر سالبة، أما إذا كانت إشارة الحد المطلق موجبة فهذا يعني أن العددين لهما الإشارة نفسها وهي إما موجبة وإما سالبة.

وبذلك يتم تحويل المعادلة إلى حاصل ضرب مقدارين كما يأتي:

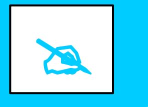
$$(x+4)(x+9)=0$$

ويكون حل المعادلة (إيجاد قيم x):

إما $(x+4=0)$ أو $(x+9=0)$

وبذلك فإن جذري المعادلة هما:

$$x = (-9\ ,\ -4)$$ □



مثال 7:

باستخدام التحليل حل المعادلة:

$$x^2 + 4x = 5$$ □

$$\therefore x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$\therefore (x-1)(x+5) = 0$$

تحليل المثال:
نكتب المعادلة بالصورة التي يكون فيها الطرف الأيمن مساوياً للصفر.

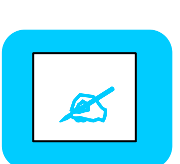
نلاحظ أنه تم تحليل المثال إلى مقدارين حاصل ضربهما يساوي (-5) وهو الحد المطلق ومجموعهما يساوي (4) وهو معامل x .

ويكون حل المعادلة (إيجاد قيم x):

إما $(x+5=0)$ أو $(x-1=0)$

وبذلك فإن جذري المعادلة هما :

$x=-5 \quad , \quad x=1$



مثال 8:

حل المعادلة:

$$6x^2-x-15=0$$

الحل:

نلاحظ أن معامل x^2 لا يساوي واحداً صحيحاً ، وبالتالي تم تحليل الحد $6x^2$ إلى $(2x)$, $(3x)$. ويكون حل المعادلة:

$$(3x-5)\ (2x+3)=0$$

وبناءً عليه فقد تم تحليل المثال إلى مقدارين، حاصل ضربهما يساوي (-15) وهو الحد المطلق ومجموعهما يساوي (-1) وهو معامل x .

ويكون حل المعادلة (إيجاد قيم x):

□إما $(3x-5=0)$ أو $(2x+3=0)$

$$\therefore 2x=-3 \quad , \quad 3x=5$$

❖ وبذلك فإن جذري المعادلة هما :

$$x=\left\{\frac{-3}{2} \quad , \quad \frac{5}{3}\right\}$$

الطريقة الثانية: طريقة القانون العام (الصيغة العامة):

تستخدم طريقة القانون العام لحل معادلة الدرجة الثانية وتعطي النتائج نفسها التي يتم الحصول عليها باستخدام التحليل.

تعريف الصيغة العامة للقانون:

إذا كانت: $ax^2 + bx + C = 0$ فإن:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيث: a : هو معامل x^2 و b معامل x و c الحد المطلق.

مثال9:

باستخدام الصيغة العامة حل المعادلة:

$$x^2 + 13x = -36$$

الحـــل:

$$\therefore x^2 + 13x + 36 = 0$$

ويتم تحديد قيم:

$$a = 1 \ , \ b = 13 \ , \ C = 36$$

وبالتعويض عن هذه القيم في الصيغة العامة نحصل على ما يأتي:

$$\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-(13) \pm \sqrt{(13)^2 - 4(1 \times 36)}}{2(1)} \Rightarrow x = \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{2}$$

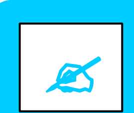
$$\therefore x = \frac{-13+5}{2} = -4 \quad , \quad x = \frac{-13-5}{2} = -9 \square$$

❖ وبذلك يكون حل المعادلة:

$$x = (-4 \ , -9)$$

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها باستخدام التحليل في مثال 6.

تحليل المثال:
نبدأ عملية الحل باستخدام الصيغة العامة للقانون، وذلك بكتابة المعادلة بالصورة التي يكون فيها الطرف الأيمن مساوياً للصفر.



مثال 10:

باستخدام الصيغة العامة حل المعادلة:

$$4x^2-16x+15=0$$

الحـل:

❖يتم تحديد قيم:

$$a=4\ ,\ b=-16\ ,\ C=15$$

وبالتعويض عن هذه القيم في الصيغة العامة نحصل على ما يأتي:

$$\because x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

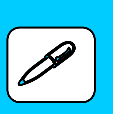
$$\therefore x=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4(4\times15)}}{2(4)} \Rightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{16}}{8}$$

$$\therefore x=\frac{16+4}{8}=\frac{5}{2}\quad ,\quad x=\frac{16-4}{8}=\frac{3}{2}$$

❖ وبذلك يكون حل المعادلة:

$$x=\left(\frac{5}{2}\ ,\ \frac{3}{2}\right)$$

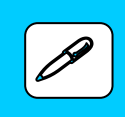




باستخدام التحليل: حل المعادلتين الآتيتين:

(a) $x^2-x-6=0$, (b) $5x^2+17x=-6$

تدريب (3)



باستخدام القانون حل المعادلتين الآتيتين:

(a) $x^2+3x-40=0$, (b) $5x^2+40x+80=0$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

؟

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام التحليل، ثم حقق النتائج التي تحصل عليها باستخدام القانون:

(a) $4x^2 + 16x + 16 = 0$, (b) $x^2 - 2x - 3 = 0$

2 . 4. حل نظام المعادلات الخطية باستخدام (قاعدة كرامير):

تستخدم قاعدة كرامير في حل نظم المعادلات الخطية غير المتجانسة التي يكون فيها عدد المعادلات مساوياً لعدد المجاهيل و قيمة محدد مصفوفة المعاملات لا يساوي صفراً ($|A| \neq 0$).

وتعتبر هذه القاعدة أكثر الطرق استخداماً وشيوعاً بين الاقتصاديين لما تمتاز به من سهولة التطبيق. والصورة العامة لكتابة المعادلات الخطية هي:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m$$

❖ المجاهيل هي:

$X_1 , X_2 , \ldots.. , X_n$

❖ معاملات المجهول X_1 هي:

a_{11} , a_{21} , a_{m1}

❖ معاملات المجهول X_2 هي:

a_{12} , a_{22} , a_{m2}

❖ معاملات المجهول X_n هي:

a_{1n} , a_{2n} , a_{mn}

❖ عمود الثوابت هو:

b_1 , b_2 , b_m

2 .4 .1. حل المعادلات الخطية في حالة مجهولين

بفرض أنه لدينا نظم المعادلات الخطية الآتية:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 = b_2$$

والصورة العامة لإيجاد قيم المجهولين x_1 , x_2 نتبع الأتي:

❖ كتابة مصفوفة معاملات المجهولين:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

❖ التأكد من أن قيمة محدد مصفوفة معاملات المجهولين لا تساوي صفراً.

$$\Delta = (a_{11} \times a_{22} - a_{21} \times a_{12}) \neq 0$$

❖ إيجاد قيمة Δ_1 , Δ_2 بعد استبدال معاملات x_1 , x_2 في مصفوفة معاملات المجهولين بعمود الثوابت.

$$\frac{X_1}{\Delta_1} = \frac{X_2}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta} \qquad (1)$$

$$\frac{X_1}{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{X_2}{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

$$\therefore \frac{X_1}{\Delta_1} = \frac{1}{\Delta} \; , \quad \frac{X_2}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta} \qquad (3)$$

وبالتالي فإن:

$$\Delta X_1 = \Delta_1 \; ,$$
$$\Delta X_2 = \Delta_2$$

وذلك بضرب الطرفين في الوسطين (العلاقة 3). وتتحدد قيم المجهولين كما يأتي:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

حيث:

$\Delta \neq 0$: قيمة محدد معاملات المجاهيل $X_1 \ , \ X_2$:

Δ_1 : قيمة محدد معاملات المجاهيل بعد استبدال معاملات "X_1" بعمود الثوابت $b_1 \ , \ b_2$.

Δ_2 : قيمة محدد معاملات المجاهيل بعد استبدال معاملات "X_2" بعمود الثوابت $b_1 \ , \ b_2$.

مثال 11:

باستخدام المحددات حل المعادلتين الآتيتين:

$$X_1 + X_2 = 1$$
$$2X_1 - 3X_2 = 7$$

الحل:

❖ يتم كتابة مصفوفة معاملات المجهولين وإيجاد قيمة المحدد Δ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = [\ (1 \times -3) - (2 \times 1)\ ]$$
$$= -5$$

❖ يتم إيجاد قيمة Δ_1 بعد استبدال عمود معاملات X_1 في مصفوفة معاملات المجهولين بعمود الثوابت: $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ ينتج ما يأتي:

$$\therefore \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= (1 \times -3) - (7 \times 1)$$
$$= -10$$

❖ يتم إيجاد قيمة Δ_2 بعد استبدال عمود معاملات X_2 في مصفوفة معاملات المجهولين بعمود الثوابت: $\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ ينتج ما يأتي:

$$\therefore \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= (1 \times 7) - (2 \times 1)$$
$$= 5$$

ويتم إيجاد قيم المجهولين X_2 , X_1 كما يأتي:

$$\because X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad \therefore X_1 = \frac{-10}{-5}$$
$$= 2 \quad ,$$
$$\because X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad \therefore X_2 = \frac{5}{-5}$$
$$= -1$$
$$\therefore X_1 = 2 \quad , \quad X_2 = -1$$

2 .4 .2. حل المعادلات الخطية في حالة ثلاثة مجاهيل

الصورة العامة لحل المعادلات الخطية ذات الثلاث مجاهيل.

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad , \quad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad , \quad X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

حيث:

$\Delta \neq 0$: قيمة محدد معاملات المجاهيل X_3 , X_2 , X_1 :

Δ_1 : قيمة محدد معاملات المجاهيل بعد استبدال معاملات "X_1" بعمود الثوابت b_1 , b_2 , b_3.

Δ_2 : قيمة محدد معاملات المجاهيل بعد استبدال معاملات "X_2" بعمود الثوابت b_1 , b_2 , b_3.

Δ_3 : قيمة محدد معاملات المجاهيل بعد استبدال معاملات "X_3" بعمود الثوابت b_1 , b_2 , b_3.

مثال 12:

باستخدام المحددات أوجد قيم كل من " X_1 , X_2 , X_3 " في المعادلات الآتية:

$$2X_1+3X_2-X_3=4$$
$$5X_1-X_2+2X_3=15$$
$$3X_1+2X_2+0X_3=8$$

الحـل:

❖ يتم كتابة مصفوفة معاملات المجاهيل وإيجاد قيمة المحدد:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 5 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

وباستخدام عناصر العمود الأول فإن قيمة المحدد "Δ":

$$\Delta=2\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}$$
$$=2\,[(-1\times0)-(2\times2)]-5[(3\times0)-(2\times-1)]+3[(3\times2)-(-1\times-1)]$$
$$\therefore\Delta=-3\square$$

❖ يتم إيجاد قيمة Δ_1 بعد استبدال عمود معاملات X_1 في مصفوفة معاملات المجاهيل بعمود الثوابت: $\begin{bmatrix}4\\ 15\\ 8\end{bmatrix}$ ينتج ما يأتي:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}4 & 3 & -1\\ 15 & -1 & 2\\ 8 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

وباستخدام عناصر العمود الأول فإن قيمة المحدد "Δ_1":

$$\Delta_1 = 4\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 15\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4[(-1\times0) - (2\times2)] - 15[(3\times0) - (2\times-1)] + 8[(3\times2) - (-1\times-1)]$$

$$\therefore \Delta_1 = -6$$

❖ يتم إيجاد قيمة Δ_2 بعد استبدال عمود معاملات X_2 في مصفوفة معاملات المجاهيل بعمود الثوابت: $\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix}$ ينتج ما يأتي:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 15 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

وباستخدام عناصر العمود الأول فإن قيمة المحدد "Δ_2":

$$\Delta_2 = 2\begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 15 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(15\times0) - (8\times2)] - 5[(4\times0) - (8\times-1)] + 3[(4\times2) - (15\times-1)]$$

$$\therefore \Delta_2 = -3 \quad \square$$

❖ يتم إيجاد قيمة Δ_3 بعد استبدال عمود معاملات X_3 في مصفوفة معاملات المجاهيل بعمود الثوابت: $\begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 8 \end{bmatrix}$ ينتج ما يأتي:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 15 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

وباستخدام عناصر العمود الأول فإن قيمة المحدد "Δ_3":

$$\Delta_3 = 2\begin{vmatrix} -1 & 15 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 15 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(-1\times8) - (2\times15)] - 5[(3\times8) - (2\times4)] + 3[(3\times15) - (-1\times4)]$$

$$\therefore \Delta_3 = -9$$

ويتم إيجاد قيم المجاهيل X_3 , X_2 , X_1 كما يأتي:

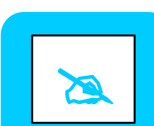
$$\because X_1 = \frac{\Delta_1}{-3} \quad \therefore X_1 = \frac{-6}{-3} = 2 ,$$

$$\because X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \therefore X_2 = \frac{-3}{-3} = 1,$$

$$\because X_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad \therefore X_3 = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$\therefore X_1 = 2 \quad , \quad X_2 = 1 \quad , \quad X_3 = 3 \square$$

مثال13:



تمتلك مطاحن البحر الأحمر مصنعين لإنتاج الدقيق، وكل مصنع مجهز بخطي إنتاج أحدهما للدقيق الفاخر والثاني للدقيق العادي. فإذا علمت أن كل 100 ساعة تشغيل في كل من المصنعين تؤدي إلى إنتاج ما يأتي "بالطن".

	المصنع الأول	المصنع الثاني	
الخط الإنتاجي الأول:	5	3	الدقيق الفاخر
الخط الإنتاجي الثاني:	3	6	الدقيق العادي

والمطلوب:

تحديد عدد ساعات التشغيل اللازمة لإنتاج 62 طناً من الدقيق الفاخر و 75 طناً من الدقيق العادي في كلا المصنعين.

الحل:

بفرض أن عدد ساعات التشغيل المطلوبة في المصنع الأول X_1 (100ساعة) وأن ساعات التشغيل المطلوبة في المصنع الثاني X_2 (100ساعة). وبالتالي فإن عدد ساعات التشغيل اللازمة في كلا المصنعين لإنتاج المطلوب تتحدد وفقاً للمعادلتين:

$$5X_1 + 3X_2 = 62$$
$$3X_1 + 6X_2 = 75 \square$$

❖ يتم كتابة مصفوفة معاملات المجهولين وإيجاد قيمة المحدد Δ :

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = [\ (5\times6)\ -(3\times3)\ ]$$
$$= 21$$

❖ يتم إيجاد قيمة Δ_1 بعد استبدال عمود معاملات X_1 في مصفوفة معاملات المجهولين بعمود الثوابت: $\begin{bmatrix} 62 \\ 75 \end{bmatrix}$ ينتج ما يأتي:

$$\therefore \Delta_1 = \begin{vmatrix} 62 & 3 \\ 75 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= (62\times6)\ -(75\times3)$$
$$= 147$$

❖ يتم إيجاد قيمة Δ_2 بعد استبدال عمود معاملات X_2 في مصفوفة معاملات المجهولين بعمود الثوابت: $\begin{bmatrix} 62 \\ 75 \end{bmatrix}$ ينتج ما يأتي:

$$\therefore \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 62 \\ 3 & 75 \end{vmatrix}$$
$$= (5\times75)\ -(3\times62)$$
$$= 189$$

ويتم إيجاد قيم المجهولين X_2 , X_1 كما يأتي:

$$\because X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad \therefore X_1 = \frac{147}{21} = 7 \qquad ,$$

$$\because X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad \therefore X_2 = \frac{189}{21} = 9$$

وهذا يعني أنه لإنتاج 62 طناً دقيقاً فاخراً و 75 طناً دقيقاً عادياً يلزم تشغيل المصنعين ساعات التشغيل الآتية:

المصنع الأول:

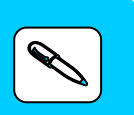
$$X_1 \times 100$$

$$7 \times 100 = 700$$ ساعة تشغيل.

المصنع الثاني:

$$X_2 \times 100$$

$$9 \times 100 = 900$$ ساعة تشغيل.



تدريب (4)

باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية:

$$X_1 - 2X_2 + X_3 = 0 \qquad 2X_1 + X_3 = 5 \qquad -X_2 + 2X_3 = 4$$



أسئلة التقويم الذاتي (3)

باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية:

$$2x - y - z = 6 \qquad x + 3y = 2z = 1 \qquad 3x - y - 5z = 1$$

5.2. حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات:

يقصد بنظام المعادلات الخطية مجموعة من المعادلات التي تأخذ الصورة الآتية:

$$\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n &= b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n &= b_2 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n &= b_m
\end{aligned}$$

❖ المجاهيل هي:

$$X_1 \ , X_2 \ , ... \ , X_n$$

ويمكن التعبير عن نظام المعادلات الخطية أعلاه في صيغة نظام المصفوفات على النحو الأتي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \quad \times \quad X \ = \ D\square$$

ويلاحظ أن:

❖ الطرف الأيسر هو عبارة عن مصفوفة معاملات المجاهيل- نرمز لها بالرمز A مضروبا في مصفوفة متجه المجاهيل ونرمز له بالرمز X .

❖الطرف الأيمن هو مصفوفة متجه عمود الثوابت-نرمز لها بالرمز D .

ويمكن كتابة نظام المعادلات الخطي السابق في صورة مختصرة.

$$A \times X = \ D$$

وبضرب طرفي العلاقة السابقة في A^{-1} نحصل على العلاقة الآتية:

$$X = A^{-1} D$$

حيث:

X : مصفوفة متجه المجاهيل.

A^{-1} : مقلوب مصفوفة معاملات المجاهيل.

D : مصفوفة متجه الثوابت.

شروط حل المعادلات الخطية.

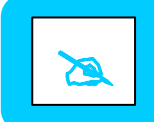
❖عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل.

❖محدد مصفوفة معاملات المجاهيل ($\Delta_A \neq 0$).

2 .5 .1. حل المعادلات الخطية في حالة مجهولين:

مثال14 :

باستخدام المصفوفات حل المعادلتين:



$$7x - 10y = 4 \qquad (1)$$
$$9x - 13y = 5 \qquad (2)$$

الحـل:

نكتب المعادلتين في الصورة الآتية:

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 9 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \square$$

بضرب طرفي العلاقة في مقلوب مصفوفة معاملات المجاهيل A^{-1} ينتج ما يأتي:

$$A^{-1} \times A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد قيم المجاهيل (x , y) نتبع الخطوات الآتية:

1- نكتب مصفوفة معاملات المجاهيل في الصورة الآتية:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 9 & -13 \end{pmatrix}$$

2- إيجاد قيمة محدد مصفوفة معاملات المجاهيل:

$$\Delta_A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 9 & -13 \end{pmatrix} = (7 \times -13) - (-10 \times 9)$$
$$= -1$$

3- إيجاد مصفوفة العوامل المرافقة لمصفوفة معاملات المجاهيل:

$$A\,dj.(A) = \begin{pmatrix} -13 & -9 \\ 10 & 7 \end{pmatrix}$$

4-إيجاد المصفوفة المُبدلة لمصفوفة العوامل المرافقة:

$$(A\,dj.\,A)^T = \begin{pmatrix} -13 & 10 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

5-إيجاد مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \times (Adj.A)^T$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -13 & 10 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

ولإيجاد قيم المجاهيل (x , y) نستخدم العلاقة الآتية:

$$X = A^{-1} \times D$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -13 & 10 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -10 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

وبضرب عمود الثوابت $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ في الصف الأول والثاني من المصفوفة $\begin{pmatrix} 13 & -10 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$:

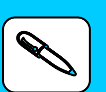
ينتج ما يأتي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن قيم المجهولين هي:

$$x = 2 \quad , \quad y = 1$$

تدريب (5)



أوجد قيم كل من المجاهيل $(x_1 \ , \ x_2)$:

$$2x_1 - 3x_2 = 4 \qquad x_1 + 5x_2 = 2$$

أسئلة التقويم الذاتي (4)

؟

أوجد قيم كل من المجاهيل $(x_1 \ , \ x_2)$:

$$2x_1 - 5x_2 = 8 \qquad 3x_1 - 2x_2 = -7$$

أسئلة التقويم الذاتي (5)

؟

أوجد قيم كل من المجاهيل (x_1 , x_2) باستخدام المصفوفات:

$$2x_1 + 2x_2 = 8 \qquad 4x_1 + 6x_2 = 22$$

2 .5 .2 حل المعادلات الخطية في حالة ثلاثة مجاهيل:

مثال15 :



باستخدام المصفوفات حل المعادلات الآتية:

$$2x + y - z = 10 \qquad (1)$$
$$3x + 2y + 2z = 1 \qquad (2)$$
$$5x + 4y + 3z = 4 \qquad (3)$$

الحـل:

يتم كتابة مصفوفة معاملات المجاهيل:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

نوجد قيمة محدد مصفوفة معاملات المجاهيل باستخدام عناصر الصف الأول:

$$\Delta_A = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta_A = -7$$

مصفوفة العوامل المرافقة:

$$\text{Adj. }(A) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -11 & 16 & -3 \\ 6 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj. }(A)^T = \begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \square$$

مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\because X = A^{-1} \times D$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} -2 & -11 & 6 \\ 1 & 16 & -10 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -7 \\ -14 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن قيم المجاهيل هي:

$x = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , z = -3$

مثال16:

بفرض أنه لدينا المعادلات الخطية في الصورة:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

المطلوب:

أوجد قيم المجاهيل $(x \;,\; y \;,\; z)$ باستخدام المصفوفات.

الحل:

$$\because A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \therefore \Delta_A = -1$$

مصفوفة العوامل المرافقة:

$$\text{Adj. }(A) = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Adj.(A)^T = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\because X = A^{-1} \times D$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن قيم المجاهيل هي:

$$x = -1 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = 3$$

تدريب (6)

مستخدماً المصفوفات أوجد قيم كل من x_1 , x_2 , x_3 في المعادلات الآتية:

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 = -1$$

أسئلة التقويم الذاتي (6)

مستخدماً المصفوفات أوجد قيم كل من x , y , z في المعادلات الآتية:

$$2x - 5y + 2z = 7$$
$$x + 2y - 4z = 3$$
$$3x - 4y - 6z = 5$$

أسئلة التقويم الذاتي (7)

مستخدماً المصفوفات أوجد قيم كل من x_1 , x_2 , x_3 في المعادلات الآتية:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$$

3. الخلاصة:

تناولت هذه الوحدة حل المعادلات الجبرية ، حيث اشتملت الوحدة على الصور المختلفة للمعادلات الخطية ومعادلات الدرجة الثانية وأسلوب حل المعادلات الخطية باستخدام المحددات والمصفوفات، وهذا خلاصة لأهم الموضوعات التي وردت في مادة هذه الوحدة:

1. المعادلات الخطية في حالة متغير واحد:

هي المعادلة التي يمكن كتابتها بالصورة:

$$ax + b = 0 \quad , \quad a \neq 0$$

ويتكون حل المعادلة في هذه الحالة من قيمة وحيدة فقط.

2. المعادلات الخطية في حالة متغيرين:

3. معادلات الدرجة الثانية:

هي معادلة صفرية يكون طرفها الأيسر دالة من الدرجة الثانية وطرفها الأيمن مساويا للصفر. ويمكن حل هذا النوع من المعادلات إما باستخدام طريقة التحليل وإما بطريقة القانون. وكلتا الطريقتين تؤديان إلى النتيجة نفسها.

4. حل المعادلات الخطية في حالة متغيرين وثلاثة متغيرات باستخدام المحددات:

يتم استخدام قاعدة كرامر (المحددات) لحل المعادلات الخطية سواء كان ذلك في حالة متغيرين أو ثلاثة متغيرات. والشرط الأساسي لتطبيق هذه الطريقة هو أن محدد مصفوفة معاملات المجاهيل لا يساوي الصفر.

5. حل المعادلات الخطية في حالة متغيرين وثلاثة متغيرات باستخدام المصفوفات:

تعتبر المصفوفات من الطرق المناسبة للتعامل مع أي نظام خطي مهما كبر عدد المعادلات، ويتم استخدام مقلوب المصفوفة لحل المعادلات الخطية. والشرط الأساسي هذه الطريقة هو أن محدد مصفوفة معاملات المجاهيل لا

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الثامنة:

عزيزي الدارس ، بعد دراستك للوحدة السابعة (المعادلات الجبرية) أصبحت قادراً على حل المعادلات الخطية في حالة متغير واحد ومتغيرين وحل معادلة الدرجة الثانية، بالإضافة إلى استخدام المحددات والمصفوفات في حل معادلات النظام الخطي.

وفي الوحدة الثامنة سنتناول دراسة العلاقات والدوال، حيث سنركز على تعريف العلاقة وأهميتها، وأنواع العلاقات، تعريف الدالة وأنواع الدوال من حيث نمط تغيير دوال (تزايدية، تناقصية) والدوال الزوجية والفردية والعكسية، بالإضافة إلى الدوال الصريحة والضمنية.

5. إجابات التدريبات:

تدريب (1):

السؤال الأول:

❖ المعادلات الخطية في حالة متغير واحد :

$$(a)\ \because\ 2x-6=4 \qquad \therefore\ 2x=4+6 \ \Rightarrow\ 2x=10$$

$$\therefore x=5$$

$$(b)\ \because 10x-8=6+3x$$

$$\therefore 10x-3x=6+8 \qquad \Rightarrow\ 7x=14$$

$$\therefore x=2$$

السؤال الثاني: ❖المعادلات الخطية في حالة متغيرين:

$$(a)\qquad \begin{array}{ll} 2x_1+x_2=11 & (1) \\ 5x_1-2x_2=-4 & (2) \end{array} \quad \square$$

❖ بضرب المعادلة الأولى × (2-) ينتج ما يأتي:

$$4x_1+2x_2=22 \qquad (3)$$

❖ بجمع المعادلة (3) مع المعادلة (2) ينتج ما يأتي:

$$4x_1 + 2x_2 = 22 \qquad (3)$$
$$5x_1 - 2x = -4 \qquad (4)$$

$$9x_1 = 18 \qquad \Rightarrow x_1 = 2$$

❖ بالتعويض عن قيمة $x_1 = 2$ في المعادلة الأولى ينتج ما يأتي:

$$\because 2x_1 + x_2 = 11 \Rightarrow 2(2) + x_2 = 11 \Rightarrow x_2 = 11 - 4$$
$$\therefore x_2 = 7$$

ويكون حل المعادلتين: $\{ x_1 = 2 \ , \ x_2 = 7 \}$

(b)
$$x + 3y = 2 \qquad (1)$$
$$2x - 3y = 1 \qquad (2)$$

❖ بجمع المعادلة (1) مع المعادلة (2) ينتج ما يأتي:

$$x + 3y = 2 \qquad (3)$$
$$2x - 3y = 1 \qquad (4)$$

$$3x = 3 \qquad \Rightarrow x = 1 \quad \square$$

❖ بالتعويض عن قيمة $x = 1$ في المعادلة الأولى ينتج ما يأتي:

$$\because x + 3y = 2 \Rightarrow 1 + 3y = 2 \Rightarrow 3y = 1$$
$$\therefore y = \frac{1}{3}$$

ويكون حل المعادلتين: $\{ x = 1 \ , \ y = \frac{1}{3} \}$

معادلات الدرجة الثانية:

❖ تدريب (2):

$$(a)\ \because x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0$$

$$\therefore x-3=0 \Rightarrow x=3 \quad ,$$

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

وبذلك يكون حل المعادلة: $\{x=3 \quad , \quad x=-2\}$

$$(b)\ \because 5x^2+17x+6=0 \Rightarrow (5x+2)(x+3)=0$$

$$\therefore (5x+2)=0 \Rightarrow 5x=-2$$

$$\therefore x=\frac{-2}{5} \quad ,$$

$$(x+3)=0 \Rightarrow x=-3$$

$$\therefore x=-3$$

وبذلك يكون حل المعادلة: $\{x=\frac{-2}{5} \quad , \quad x=-3\}$

❖ تدريب (3):

$$(a)\ \because x^2+3x-40=0 \Rightarrow \therefore a=1 \ , \ b=3 \ , \ c=-40 \quad ,$$

$$\because x=\frac{-(b)\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4(1\times-40)}}{2} \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{2}$$

$$\therefore x=\frac{-3+13}{2} \Rightarrow x=\frac{10}{2}=5 \quad ,$$

$$x=\frac{-3-13}{2}=\frac{-16}{2} \Rightarrow x=-8$$

وبذلك يكون حل المعادلة: $\{x=5 \quad , \quad x=-8\}$

□

□

(b) $\because 5x^2 + 40x + 80 = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore a = 5 \; , \; b = 40 \; , \; c = 80 \; ,$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 - 4(5 \times 80)}}{10} \Rightarrow x = \frac{-40 \pm \sqrt{0}}{10}$$

$$\therefore x = \frac{-40 + 0}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{-40}{10} \quad \therefore x = -4 \; ,$$

□

$$x = \frac{-40 - 0}{10} \quad \Rightarrow x = \frac{-40}{10} \quad \therefore x = -4$$

وبذلك يكون حل المعادلة: $\{ x = -4 \; , \; x = -4 \}$

المحددات: تدريب(4):

يتم إيجاد قيمة محدد مصفوفة عوامل المجاهيل $|A|$ فنحصل على:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

□

□

❖ ثم نقوم بإيجاد قيم المحددات Δ_1 ، Δ_2 ، Δ_2 التي تستخدم في إيجاد قيم المجاهيل X_1 ، X_2 ، X_3 فنحصل على:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

ويلاحظ أنه عند إيجاد قيمة المحدد Δ_1 قمنا بإحلال متجه عمود الثوابت $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ محل العمود الأول وعند إيجاد قيمة المحدد Δ_2 قمنا بإحلال متجه عمود الثوابت نفسه محل العمود الثاني، وعند إيجاد قيمة المحدد Δ_3 فمنا بإحلال متجه عمود الثوابت نفسه محل العمود الثالث.

نقوم بعد ذلك بحساب قيم المجاهيل كالآتي:

$$X_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{7}{7} = 1$$

$$X_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{14}{7} = 2$$

$$X_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{21}{7} = 3$$

المصفوفات: تدريب (5):

يتم كتابة نظام المعادلات بصيغة المصفوفات كما يأتي:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن مصفوفة معاملات المجاهيل يتم كتابتها كالتالي:

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

❖ يتم إيجاد قيمة المحدد:

$$\Delta_B = (2\times5) - (1\times-3)$$
$$= 13$$

❖ مصفوفة العوامل المرافقة:

$$Adj.B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

❖ مُبدل مصفوفة العوامل المرافقة:

$$(Adj.B)^T=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

❖ مقلوب المصفوفة:

$$A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\because X = A^{-1} D$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 26 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وتكون قيم المجاهيل : $x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0$

تدريب (6):

❖ يتم كتابة مصفوفة معاملات المجاهيل باستخدام عناصر الصف الأول:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \therefore \Delta_A = 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta_A = 1$$

❖ مصفوفة العوامل المرافقة:

$$\text{Adj.A} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❖ مُبدل مصفوفة العوامل المرافقة:

$$(\text{Adj.A})^T = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\because X = A^{-1} \times D$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

❖ وهذا يعني أن: $x_1 = 10 \quad , \quad x_2 = -1 \quad , \quad x_3 = -2$

6. المراجع:

1. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
2. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
3. الوحيشي، جمال أحمدوآخرون، (2006)، الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الرابعة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
4. حسن، سعيد أحمد وآخرون (2005): الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الثالثة، منشورات مركزا لأمين، صنعاء: الجمهورية اليمنية.
5. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، غير محدد الطبعة، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
6. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

7. التعيينات:

السؤال الأول:

حل المعادلات الآتية:

(a) $6x - 10 = -40$ (b) $3(2x - 4) + 3 = 10 - (x + 5)$

(C) $\frac{1}{2}x - 20 = 0$ (d) $\frac{7}{8}x - \frac{14}{4} = 0$

السؤال الثاني:

حل المعادلات الآتية باستخدام التحليل:

(a) $6x^2 + 37x + 45 = 0$ (b) $x^2 + 1.9x - 1.5 = 0$

(C) $10x^2 + 19x = 15$ (d) $x^2 - x - 6 = 0$

السؤال الثالث:

حل المعادلات الآتية باستخدام القانون:

(a) $x^2 + 7x + 12 = 0$ (b) $2x^2 + 20x + 32 = 0$

السؤال الرابع:

حل المعادلات الآتية باستخدام الحذف والتعويض:

(a) $5x + 6y = 7 \quad , \quad 7x - 11y = -29$

(b) $8x_1 - 10x_2 = 19 \quad , \quad 12x_1 + 22x_2 + 27 = 0$

السؤال الخامس:

حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات:

(a) $5x + 6y = 7 \quad , \quad 7x - 11y = -29$

(b) $8x_1 - 10x_2 = 19 \quad , \quad 12x_1 + 22x_2 + 27 = 0$

(C) $2x - y - z = 6 \quad , \quad x + 3y + 2z = 1 \quad , \quad 3x - y - 5z = 1$

السؤال السادس:

حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات:

(a) $4x+2y=38 \quad , \quad 2x+3y=33$

(b) $x+y+z=3 \quad , \quad x-2y+2z=5 \quad , \quad 2x+5y-z=0$

(C) $x+y+z=1 \quad , \quad 2x-2y+z=3 \quad , \quad x+3y+2z=1$

الوحدة الثامنة 8

العلاقات والدوال

محتويات الوحدة

1. المقدمة

1.1. تمهيد:

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة (العلاقات والدوال) والتي تتألف من أربعة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بتعريف العلاقة وخلفية عامة عنها.

ويتناول القسم الثاني أنواع العلاقات، والصور العامة لها وأسلوب حلها، متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن -عزيزي الدارس -من استيعاب تلك الأنواع من العلاقات واستخدامها في الحياة العملية.

ويُركز القسم الثالث من هذه الوحدة على تعريف للدالة وأنواعها المختلفة، متضمناً أمثلة توضيحية تمكن الدارس من استيعاب تلك الدوال واستخدامها في الحياة العملية، حيث يمكن صياغة الكثير من المشاكل-التي تواجهنا-على صورة دالة توضح العلاقة بين متغير وآخر.

أما القسم الرابع فيتناول خواص الدوال، من حيث التزايد والتناقص، زوجية أو فردية، صريحة أو ضمنية. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

1 .2. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية الثامنة وهي بعنوان " العلاقات والدوال " ويتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تُعرّف العلاقة.
2. تشرح أهمية العلاقات.
3. تذكر أنواع العلاقات.
4. تعرّف الدالة.
5. تشرح أهمية الدوال في الحياة العملية.
6. تذكر أنواع الدوال.
7. تذكر خواص الدوال.
8. تشرح الدوال التزايدية.
9. تذكر الدوال التناقصية.
10. تذكر الفرق بين الدوال الصريحة والدوال الضمنية.



3.1. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من أربعة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الأول بالهدف الأول، والذي يركز على العلاقات وتعريفها.

وفي القسم الثاني تناولنا أنواع العلاقات، والصور العامة لها.

أما في القسم الثالث فقد تم التركيز على تعريف للدالة وأنواعها المختلفة ومدى أهميتها في الحياة العملية.

وتناول القسم الرابع خواص الدوال من حيث، التزايد، التناقص، زوجية، أوفردية، صريحة أوضمنية.

4.1. القراءات المساعدة:

تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، آمل عزيزي الدارس أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
3. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
4. الجاسر، إبراهيم عبدالله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، مكتبة الملك فهد الوطنية للنشر، الرياض: المملكة العربية السعودية
5. الغرابي، سليم إسماعيل (1989): مقدمة في التحليل الرياضي، غير محدد الطبعة،منشورات جامعة بغداد، بغداد: الجمهورية العراقية.
6. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
7. مصطفى، احمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.



5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة وأسئلة التقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاءً من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة وجوب تأكدك من تهيئة المكان الملائم للدراسة ولديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي والتدريبات، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. العلاقات والدوال :

1.2. مقدمة:

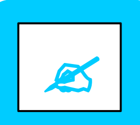
تعد الدالة من الأدوات المهمة في الرياضيات وذلك لأن الكثير من المشاكل التي تواجهنا في الحياة العملية، يمكن صياغتها على صورة دالة لتوضح العلاقة بين متغير وآخر، ويمكن تعريف الدالة : بأنها علاقة تحدد لكل عنصر من عناصر الفئة x عنصراً واحداً فقط من عناصر الفئة y ويعبر عن ذلك بالرموز كما يأتي: $y = f(x)$ ويسمى المتغير y في العلاقة السابقة بالمتغير التابع بينما يسمى x بالمتغير المستقل لأن قيم المتغير y تحدد بعد معرفة قيمة المتغير x .

2.2. العلاقات:

1.2.2. تعريف العلاقة:

لنفرض أن A , B مجموعتان غير خاليتين، فإن أية مجموعة جزئية R من $A \times B$ تسمى علاقة من A إلى B ، أي أنه:

إذا كانت: $R \subset A \times B$ فإن R عبارة عن علاقة من A إلى B.



مثال:1

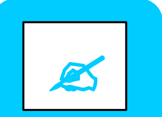
إذا كانت لدينا المجموعتان الآتيتان:

$A = \{1 , 2 , 3\} \quad , \quad B = \{5 , 7\}$

$\therefore A \times B = \{(1 , 5) , (1 , 7) , (2 , 5) , (2 , 7) , (3 , 5) , (3 , 7)\}$

$R = \{(5 , 1) , (5 , 3)\}$

$\because R \subset A \times B$ ، فإن R عبارة عن علاقة من A إلى B.



مثال:2

إذا كانت لدينا المجموعتان الآتيتان:

$B = \{5 , 7\} \quad , \quad A = \{1 , 2 , 3\}$

$\therefore B \times A = \{(5 , 1) , (5 , 2) , (5 , 3) , (7 , 1) , (7 , 2) , (7 , 3)\}$

وكانت:

$G = \{(5 , 1) , (5 , 3)\}$

$\because A \times B \subset G$ ، فإن G عبارة عن علاقة من B إلى A .

2.2.2. أنواع العلاقات:

1.2.2.2. العلاقة العكسية:

إذا كانت R علاقة من المجموعة A إلى المجموعة B . فإن العلاقة العكسية لـ R هي علاقة من B إلى A وتكون معرّفة بمجموعة كل الأزواج المرتبة (a , b) ، حيث إن: $(a , b) \in R$ ، وبالتالي فإن العلاقة العكسية في هذه الحالة يرمز لها بالرمز R^{-1} ، أي أن:

$$R^{-1} = \{(b , a) : (a , b) \in R\}$$

مثال3:

إذا كانت لدينا الفئتان الآتيتان:

$$A = \{2 , 3 , 5\} \quad , \quad B = \{2 , 4 , 6\}$$

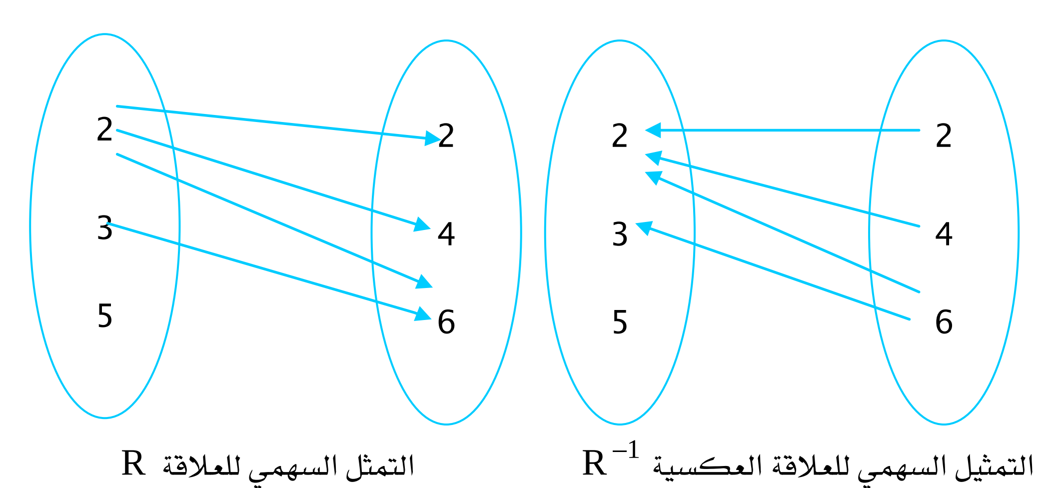
فإن:

$$R = \{(2 , 2) , (2 , 4) , (2 , 6) , (3 , 6)\}$$

وبالتالي فإن العلاقة العكسية لـ R في الصورة:

$$R^{-1} = \{(2 , 2) , (4 , 2) , (6 , 2) , (6 , 3)\}$$

ويمكن تمثيل العلاقات والعلاقات العكسية سهمياً في الشكل الأتي:



التمثل السهمي للعلاقة R 　　　 التمثيل السهمي للعلاقة العكسية R^{-1}

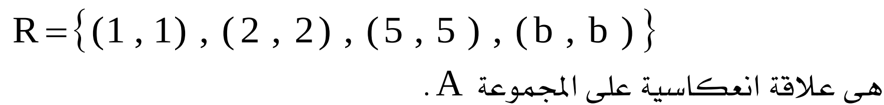
2.2.2.2. العلاقة الانعكاسية:

يقـــال أن R علاقـــة انعكاســـية " Reflexive " علـــى A إذا كـــان $(a, a) \in R$ لكل عنصر: $a \in A$.

مثال4: إذا كانت:

$$A = \{1, 2, 5, b\}$$

فإن:



$$R = \{(1, 1), (2, 2), (5, 5), (b, b)\}$$

هي علاقة انعكاسية على المجموعة A.



3.2.2.2. العلاقة المتناظرة:

يقال أن R علاقة متناظرة " Symmetric " على A إذا كان:

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \quad ,$$

بمعنى أن: R تكون علاقة متناظرة إذا كانت:

$$R = R^{-1}$$



مثال5:

إذا كانت:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

فإن:

$$R = \{(2, 4), (4, 4), (6, 2), (2, 6), (4, 2)\}\square$$

هي علاقة متناظرة على المجموعة A.

4.2.2.2. العلاقة المتعدية:

يقال أن R علاقة متعدية " Transitive " على المجموعة A إذا حققت الشرط الأتي:

$$\{(a, b) \in R, (b, c) \in R\} \Rightarrow (a, c) \in R$$

تأمل الأمثلة الآتية:

مثال6: إذا كان لدينا المجموعة الآتية:

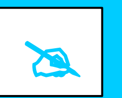
$A=\{-1 , 0 , 1 , 2\}$ فإن:

$$R=\{(-1 , 0) , (0 , 1) (-1, 1) , (0 , 2 , (-1 , 2) , (2, 2)\}$$

□ لأن: A علاقة متعدية على

$$(-1 , 0) \in R \ , (0 , 1) \in R \Rightarrow (-1 , 1) \in R \ ,$$
$$(-1 , 0) \in R \ , (0 , 2) \in R \Rightarrow (-1 , 2) \in R \ ,$$
$$(-1 , 2) \in R \ , (2 , 2) \in R \Rightarrow (-1 , 2) \in R$$

□



مثال7: إذا كانت لدينا المجموعة الآتية:

$$W=\{a , b , c\}$$

فإن:

$$R=\{(a , b) , (c , b), (b, a) , (a , c)\}$$

وبناءً عليه فإن R ليست علاقة متعدية لأن:

$$(c , b) \in R \ , (b , a) \in R \ , (c , a) \notin R$$ □

مثال8:



إذا كانت لدينا المجموعة الآتية:

$E=\{1 , 2 , 3\}$ ، اعتبر العلاقات الآتية:

$$R_1=\{(1 , 2) , (2 , 2)\}$$
$$R_2=\{(1, 2) , (2,3) , (1,3),(2, 1) , (1, 1)\}$$
$$R_3=\{(1,2)\}$$
$$R_4=\{(1,1)\}$$
$$R_5=E \times E$$

❖ اذكر فيما إذا كانت كل من العلاقات أعلاه متعدية أم لا ولماذا ؟

الحل:

كل من العلاقات السابقة متعدية لأنها تحقق التعريف ماعدا R_2 ، فإنها ليست متعدية لأن:

$(2,1) \in R_2$, $(1,2) \in R_2$, $(2,2) \notin R_2$ □
□

5.2.2.2. العلاقة التخالفيه:

يقال إن R علاقة تخالفيه " Anti - Symmetric " على المجموعة A إذا حققت الشرط الأتي:

$$\{(a,b) \in R , (b,a) \in R\} \Rightarrow a = b$$

وبعبارة أخرى إذا كانت R علاقة وكان b $\neq$ a فإن: $(a,b) \notin R$ أو $(b,a) \notin R$

تأمل المثال الأتي:



مثال9: إذا كانت لدينا المجموعة الآتية:

$E = \{1, 2, 3\}$□

❖ اعتبر العلاقات الآتية في E :

$R_1 = \{(1,2), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3)\}$

$R_2 = \{(1,1)\}$

$R_3 = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$

$R_4 = \{(1,2)\}$

$R_5 = E \times E$

اذكر فيما إذا كانت كل من العلاقات أعلاه تخالفيه أم لا؟ ولماذا ؟

الحل:

R_1 علاقة ليست تخالفيه لان $(3,2) \in R_1$, $(2,3) \in R_1$ ولكن $2 \neq 3$

R_2 علاقة تخالفيه حسب التعريف السابق.

R_3 ليست تخالفيه لان $(2,3) \in R_3$, $(3,2) \in R_3$ ولكن $2 \neq 3$

R_4 علاقة تخالفيه حسب التعريف الثاني للعلاقة التخالفيه.

R_5 ليست علاقة تخالفيه للسبب نفسه في R_3

تدريب (1)

السؤال الأول : إذا كانت لدينا المجموعتان الآتيتان:

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$

المطلوب:

اكتب العلاقة العكسية من B إلى A.

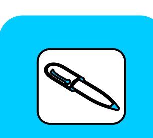
السؤال الثاني: إذا كانت لدينا المجموعة:

$B = \{2, 4, 10, d\}$

المطلوب:

اكتب العلاقة الانعكاسية على المجموعة B

تدريب (2)



على إفتراض أن:

$A = \{2, 4, 6\}$

فإذا كانت:

$R_1 = \{(2,4), (6,4), (4,4), (4,6)\}$,

$R_2 = \{(2,4), (4,6), (2,6)\}$,

$R_3 = \{(2, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 4), (6, 6)\}$

$R_4 = A \times A$

بين أي من العلاقات السابقة انعكاسية؟

تدريب (3)

السؤال الأول: إذا كانت لدينا المجموعة:

$A = \{6 , 9 , 10\}$

المطلوب: اكتب العلاقة المتناظرة R على المجموعة A.

السؤال الثاني: متى تكون العلاقة R في المجموعة A ليست متناظرة؟

السؤال الثالث: إذا كانت لدينا المجموعة:

$W = \{2 , 4 , 6\}$

❖اعتبر العلاقات الآتية في W :

$R_1 = \{(2 , 2) , (4 , 2) , (4 , 4) , (6 , 4) , (4 , 6)\}$

$R_2 = \{(2 , 2)\}$

$R_3 = \{(2 , 4)\}$

$R_4 = \{(2 , 2) , (6 , 4) , (4 , 6)\}$

$R_5 = W \times W$

❖بين فيما إذا كانت كل من العلاقات السابقة متناظرة ولماذا؟

السؤال الرابع: إذا كانت لدينا المجموعة:

$D = \{5 , 6 , 7\}$

❖اعتبر العلاقات الآتية في D :

$R_1 = \{(5 , 6) , (6 , 6)\}$

$R_2 = \{(5 , 6) , (6 , 7) , (5 , 7) , (6 , 5) , (5 , 5)\}$

$R_3 = \{(5 , 6)\}$

$R_4 = \{(5 , 5)\}$

$R_5 = D \times D$

اذكر فيما إذا كانت كل من العلاقات أعلاه متعدية أم لا ولماذا؟



أسئلة التقويم الذاتي (1)

السؤال الأول:

إذا كانت لدينا المجموعتان الآتيتان:

$C = \{4 , 6 , 7\}$, $D = \{5 , 6 , 8\}$

المطلوب: اكتب العلاقة العكسية من C إلى D.

السؤال الثاني: إذا كانت لدينا المجموعة:

$A = \{3 , 5 , 12 , b\}$

المطلوب:

اكتب العلاقة الانعكاسية على المجموعة A

؟

أسئلة التقويم الذاتي (2)

إذا كانت لدينا المجموعة:

$S = \{ 3 , 4 , 9 \}$

❖ اعتبر العلاقات الآتية في S:

$R_1 = \{(3,3) , (4,3), (4,4),(9,4),(4,9)\}$

$R_2 = \{(3 ,3)\}$

$R_3 = \{(3 ,3) , (4,9) ,(9,4)\}$

$R_4 = \{(3 , 4)\}$

$R_5 = B \times B$

❖ اذكر فيما إذا كانت كل من العلاقات أعلاه تخالفية أم لا ولماذا؟

؟

أسئلة التقويم الذاتي (3)

السؤال الأول: إذا كانت لدينا المجموعة:

$A = \{4 , 8 , 12\}$

فإذا كانت:

$R_1 = \{(4,8),(12,8),(8,8),(8,12)\}$,

$R_2 = \{(4,8) , (8,12) , (4,12)\}$,

$R_3 = \{(4 , 4) , (8 , 8) , (8 , 12) , (12 , 8), (12 , 12)\}$

$R_4 = A \times A$

❖ بين أي من العلاقات السابقة انعكاسية؟

السؤال الثاني: إذا كانت لينا المجموعة:

$M = \{3 , 5 , d\}$

المطلوب: اكتب العلاقة المتناظرة R على المجموعة M.

السؤال الثالث: إذا كانت لدينا المجموعة:

$K = \{2 , 5 , 8\}$

❖ اعتبر العلاقات الآتية في K:

$R_1 = \{(2 , 2) , (5 , 2), (5 , 5) , (8 , 5), (5 , 8)\}$

$R_2 = \{(2 , 2)\}$

$R_3 = \{(2 , 5)\}$

$R_4 = \{(2 , 2) , (8 , 5) , (5 , 8)\}$

$R_5 = K \times K$

❖ بين فيما إذا كانت كل من العلاقات السابقة متناظرة ولماذا؟

?

3.2. الدوال وأنواعها:

1.3.2. تعريف الدالة:

الدالة هي علاقة رياضية تربط متغيرين أحدهما يسمى المتغير المستقل:

" independen tvariable "والأخر يسمى المتغير التابع " dependentvariable ".

وغالبا ما تكتب هذه العلاقة بين المتغيرين في الصورة:

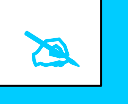
$$y = f(x)$$

ويسمى المتغير y في العلاقة السابقة بالمتغير التابع، ويكتب في الطرف الأيسر، بينما يسمى المتغير x بالمتغير المستقل، ويكتب في الطرف الأيمن، وأطلقت هذه التسميات على المتغيرين لأن قيمة المتغير y تتحدد بعد معرفة قيمة المتغير x ، وهناك أنواع وصور متعددة للدوال سوف نتعرض لها فيما بعد ونذكر منها هنا على سبيل المثال الدوال الآتية:

$$y = f(x) = x + 3 \quad , \quad y = f(x) = 2x^2 + 5x + 1$$

وتسمى القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير المستقل بنطاق الدالة " domin"
وتسمى القيم التي يأخذها المتغير التابع بمدى الدالة " range "، ولكي تكون الدالة معرفة تعريفاً كاملا لابد من تحديد كل من نطاقها ومداها.

وفي الحياة العملية توجد أمثلة عديدة للدوال نذكر منها على سبيل المثال الأتي:



مثال10 :

في مصنع لإنتاج بعض قطع أجهزة الحاسوب، إذا كانت التكلفة الثابتة في اليوم 40,000 ريال، وتكلفة التشغيل لإنتاج القطعة الواحدة هي 2000 ريال.

المطلوب:

1- اكتب التكلفة الكلية للإنتاج اليومي كدالة في عدد الأجهزة المنتجة في اليوم.

2- إذا أنتج المصنع في اليوم عدد 100قطعة، احسب التكلفة الكلية لإنتاج القطعة الواحدة،وإذا أنتج المصنع عدد 1000 قطعة في اليوم. ما هي التكلفة الكلية لإنتاج القطعة الواحدة في هذه الحالة؟ هل تعتقد أن التكلفة الكلية

لإنتاج القطعة الواحدة تقل بزيادة عدد القطع المنتجة في اليوم الواحد؟ ما هو السبب في اعتقادك ؟

3- إذا كان سعر بيع القطعة الواحدة هو 10000ريال، اكتب الربح اليومي للمصنع كدالة في عدد القطع المنتجة في اليوم الواحد .

الحل:

نرمز إلى تكلفة التشغيل بالرمز $u.c$

التكلفة الكلية بالرمز $t.c$

التكلفة الثابتة بالرمز $f.c$

1- نفترض أن عدد القطع المنتجة في اليوم الواحد هو x ، وتكلفة التشغيل في اليوم الواحد = تكلفة التشغيل لإنتاج القطعة الواحدة X عدد القطع المنتجة:

$$u.c = 2000x$$

إذن التكلفة الكلية لإنتاج عدد x من القطع = تكلفة التشغيل + التكلفة الثابتة ، أي أن:

$$t.c = f(x) = u.c + f.c$$

$$= 2000x + 40000$$

2- التكلفة الكلية لإنتاج 100قطعه في اليوم هي :

$$f(x) = f(100) = 2000 \times 100 + 40000$$

$$= 240000 \text{ ريال}$$

وعلى ذلك تكون التكلفة الكلية لإنتاج القطعة الواحد هي:

$$240000/100 = 2400 \text{ ريال} \quad \square$$

والتكلفة الكلية لإنتاج 1000قطعه في اليوم هي:

$$f(x) = f(1000) = 2000 \times 1000 + 40000$$

$$= 2040000 \text{ ريال}$$

وعلى ذلك تكون التكلفة الكلية لإنتاج الجهاز الواحد هي:

$$2040000/1000 = 2040 \text{ ريالاً}$$

ويلاحظ مما سبق أن التكلفة الكلية لإنتاج القطعة الواحدة تقل بزيادة عدد القطع المنتجة في اليوم الواحد، والسبب في ذلك يرجع إلى أنه بزيادة عدد القطع المنتجة في اليوم يقل نصيب القطعة الواحدة من التكلفة الثابتة.

3- إذا كان سعر بيع القطعة الواحدة هو 10000 يكون ثمن بيع عدد x قطعه هو:

فإذا رمزنا للربح بالرمز p فإن:

الربح = ثمن البيع – التكلفة

$$p = 500\,x - f\,(x)$$

$$= 10000 - (2000\,x + 40000)$$

$$= 8000\,x - 40000$$

وبناءً عليه فإن الربح اليومي للمصنع كدالة في عدد القطع المنتجة، يمكن التعبير عنه في الصورة الآتية:

$$p = f\,(x) = 8000x - 40000 \square$$

2.3.2. أنواع الدوال:

1.2.3.2. الدوال التزايدية:

تسمى الدالة $y = f\,(x)$ دالة تزايدية إذا ازدادت قيمة y بازدياد قيمة x ونقصت قيمة y بنقصان قيمة x (أي إذا تغيرت y في نفس اتجاه تغير x).



مثال11:

$$y = 2 + x$$

دالة تزايدية،

فإذا أخذت x على سبيل المثال القيم الآتية:

1 , 2 , 3 , 4 ,..........

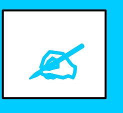
فإن y تأخذ القيم الآتية:

3 , 4 , 5 , 6 ,..........

❖ نلاحظ أن قيم x تتزايد وقيم y تتزايد أيضاً.

2.2.3.2. الدوال التناقصية:

تسمى الدالة $y = f(x)$ دالة تناقصية إذا نقصت قيمة y كلما زادت قيمة x وبالعكس إذا نقصت قيمة x تزداد قيمة y (أي إذا تغيرت y في عكس اتجاه تغير x).



مثال12:

$$y = 4 - x$$

دالة تناقصية،

فإذا أخذت x على سبيل المثال القيم الآتية:

1 , 2 , 3 ,4 ,.......

فإن y تأخذ القيم الآتية:

3 , 2 ,1 , 0 ,........

❖نلاحظ أن قيم x تتزايد، بينما قيم y تتناقص.



3.2.3.2. الدوال الزوجية:

إذا كانت:

$f(x) = f(-x)$ لجميع قيم x، فإن الدالة $f(x)$ تسمى دالة زوجية، أي أن قيمة الدالة لا تتغير سواء عوضنا عن قيمة x بكمية موجبة أو سالبة.

فمثلا الدالة:

$$f(x) = x^2$$

هي دالة زوجية لأن:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

والدالة:

$$f(x) = x^4$$

هي دالة زوجية، بمعنى أنه إذا أخذت x القيم الآتية:

1 , 2 , 3 , ... أو: -1 , -2 , -3,.........

فإن:

$$f(-x)^4 = f(-1)^4 = 1 \ , \ f(x)^4 = f(1)^4 = 1$$
$$\therefore f(-1) = f(1) \qquad ,$$
$$f(-x)^4 = f(-2)^4 = 16 \ , \ f(x)^4 = f(2)^4 = 16$$
$$\therefore f(-2) = f(2) \qquad ,$$
$$f(-x)^4 = f(-3)^4 = 81 \ , \ f(x)^4 = f(3)^4 = 81$$
$$\therefore f(-3) = f(3) \qquad ,$$

4.2.3.2. الدوال الفردية:

إذا كانت:

$f(-x) = -f(x)$ لجميع قيم x ، فإن الدالة f تسمى دالة فردية ،

أي أن قيمة الدالة عند التعويض عن x بقيم سالبة تساوي حاصل ضرب 1- في الدالة الأصلية.

فمثلا الدالة:

$$f(x) = x^3 + x$$

هي دالة فردية لأن:

$$f(-x) = f(-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$$
$$= -(x^3 + x) = -f(x)$$

تأمل المثال الأتي:

$$y = x^3$$

إذا أخذت x القيم الآتية:

-1 , -2 , -3 , -4 ,....

فإن الدالة:

$$y = x^3$$

تعتبر دالة فردية لأن:

$$f(-1) = (-)^3 = -1 \quad , \quad f(1) = (1)^3 = 1$$

$$\therefore f(-1) = -f(1)$$

$$f(-2) = (-2)^3 = -8 \quad , \quad f(2) = (2)^3 = 8$$
$$\therefore f(-2) = -f(2)$$
$$f(-3) = (-3)^3 = -27 \quad , \quad f(3) = (3)^3 = 27$$
$$\therefore f(-3) = -f(3)$$

$$f(-4) = (-4)^3 = -81 \quad , \quad f(4) = (4)^3 = 81$$
$$\therefore f(-4) = -f(4)$$

5.2.3.2. الدوال الصريحة:

هي الدوال التي يمكن كتابة معادلتها في الصورة $y = f(x)$ ، أي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في الطرف الآخر.

تأمل الأمثلة الآتية:



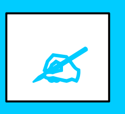
مثال13:

تعد الدالة:

$y = x^2 - 6x + 8$ دالة صريحة.



مثال14:



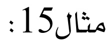
تعد الدالة:

$y = 4x + 8$ دالة صريحة.

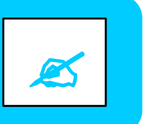
6.2.3.2. الدوال الضمنية:

هي الدوال التي يكون فيها المتغير التابع y والمتغير المستقل x في طرف واحد.

تأمل الأمثلة الآتية:



مثال15:



إذا كانت لدينا الدالة:

$$y = \frac{3x - 4}{x - 2} \quad , \quad x \neq 2 \qquad (1)$$

بالنظر للعلاقة السابقة، نلاحظ أن y دالة في x. وبضرب طرفي العلاقة (1) في $x-2$ ينتج ما يأتي:

$$xy-2y=3x-4 \rightarrow xy-2y-3x+4=0 \qquad (2)$$

نلاحظ أن العلاقتين (1) ، (2) صورتان لدالة واحدة، إلا أن العلاقة (1) تسمى دالة صريحة في المتغير x بينما العلاقة (2) تسمى دالة ضمنية.

مثال16:

الدالتين الآتيتين، دالتين ضمنيتين:

$$(a)\ y^2+4xy=10 \qquad (b)\ x^3+y^2-4x+3y=2$$ □

تدريب (4)

السؤال الأول:

إذا كان معلوماً أن التكلفة الكلية y لإنتاج عدد x وحدة من سلعة معينة معطاة بالعلاقة الآتية:

$$y=x^3-30x^2+500x+200$$

المطلوب:

اوجد تكلفة إنتاج 10 وحدات من هذه السلعة:

السؤال الثاني:

في مصنع لإنتاج بعض قطع أجهزة التلفاز الحديثة، إذا كانت التكلفة الثابتة في اليوم 400,000 ريال وتكلفة التشغيل لإنتاج القطعة الواحدة هي 20,000 ريال.

المطلوب:

1-اكتب التكلفة الكلية للإنتاج اليومي كدالة في عدد الأجهزة المنتجة في اليوم.

2-إذا أنتج المصنع في اليوم عدد 10أجهزة، احسب التكلفة الكلية لإنتاج الجهاز الواحد، وإذا أنتج المصنع عدد 100 جهاز في اليوم. ما هي التكلفة الكلية لإنتاج الجهاز الواحد في هذه الحالة؟

3-إذا كان سعر بيع الجهاز الواحد هو 10000ريال، اكتب الربح اليومي للمصنع كدالة في عدد الأجهزة المنتجة في اليوم الواحد.

□



تدريب (5)

السؤال الأول:

❖ حدد الدوال التزايدية والدوال التناقصية في كل مما يأتي:

(a) $y = f(x) = x + 4$ (b) $y = f(x) = 5 - x$

(C) $y = f(x) = x - (-2)$

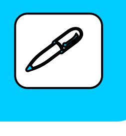
علماً بان x تأخذ القيم الآتية:

$x = (-1, 0, 1, 2, 3)$

السؤال الثاني:

❖ حدد الدوال الزوجية والدوال الفردية في كل مما يأتي:

(a) $y = f(x) = x^4$ (b) $y = f(x) = x^5$ □



السؤال الثالث:

❖ حدد الدوال الصريحة والدوال الضمنية في كل مما يأتي:

(a) $y = x^2 - x - 6 = 0$ (b) $y = x^2 + 7x = -12$

(C) $x^2y + 2xy = -2$ (d) $3xy^2 = (x + 2y)^2 - 4$

السؤال الرابع:

❖ اكتب الدالتين الآتيتين في صورة دالتين صريحتين:

(a) $y^2 + x^2 = 20$ (b) $\frac{1}{x^{-2}} - \frac{1}{y^{-2}} = -\frac{1}{10^{-1}}$

أسئلة التقويم الذاتي (4)

ابحث عن اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

(a) $f(x) = x^2 + x - 2 \quad \to x = 1$ (b) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x} \quad \to x = 0$

(C) $f(x) = \begin{cases} x - x & \to x \leq 2 \\ 3 - x & \to x > 2 \end{cases}$ عند $\Big|_{X=2}$ (d) $f(x) = \frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$

?

3. الخلاصة:

تناولت هذه الوحدة العلاقات والدوال، حيث اشتملت على مقدمة بيّنا فيها أهمية الدوال في الحياة العملية.

كما تعرضنا إلى العلاقات من حيث التعريف وأنواع تلك العلاقات، وبيّنا أن العلاقة تُعبر عن المجموعة الجزئية التي تربط بين مجموعتين، على سبيل المثال إذا كانت لدينا المجموعتين B , A. وكانت العلاقة التي تربطهما هي:

فان العلاقة السابقة تقرأ : R عبارة عن علاقة من A إلى B.

وتناولنا في هذه الوحدة أنواع العلاقات، من أهمها :

1. العلاقة العكسية ورمزنا لها بالرمز R^{-1} ، وبيّنا المخطط السهمي لهذا النوع من الدوال.
2. العلاقة الانعكاسية. وبيّنا متى تكون العلاقة R انعكاسية على المجموعة A.
3. العلاقة المتناظرة. وبيّنا أن العلاقة تكون متناظرة على A إذا كانت: $R = R^{-1}$.
4. العلاقة المتعدية، حيث تكون R علاقة متعدية على المجموعة A إذا تحقق الشرط الأتي:

$$\{(a,b)\} \in R \ , \ \{(b,C)\} \in R \Rightarrow (a \ , \ C) \in R$$

5. العلاقة التخالفيه، حيث تكون R علاقة تخالفية على المجموعة A إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\{(a,b)\} \notin R \quad \text{أو} \quad \{(b,a)\} \notin R \ , \quad a \neq b$$

وفي القسم الثالث من هذه الوحدة، فقد تم التركيز على تعريف الدالة وأنواعها المختلفة ومدى أهميتها في الحياة العملية، ورمزنا للدالة بالرمز $y = f(x)$ ، حيث تشير y إلى المتغير التابع و x إلى المتغير المستقل.

وتناول القسم الرابع والأخير من هذه الوحدة خواص الدوال من حيث، التزايد، التناقص، زوجية، أو فردية، صريحة أوضمنية. وبيّنا متى تكون الدالة تزايدية ومتى تكون تناقصية، ومتى تكون الدالة زوجية ومتى تكون فردية بالإضافة إلى الدوال الصريحة والدوال الضمنية، حيث رمزنا للدالة الصريحة بالرمز $y = f(x)$ ، بمعنى تكون قيم المتغير التابع في طرف وقيم المتغير المستقل في طرف أخر. أما بالنسبة للدالة الضمنية فتكون الصورة العامة لها: $f(x, y)$ ، بمعنى أن المتغير التابع والمتغير المستقل في طرف واحد.

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية التالية:

عزيزي الدارس، بعد دراستك للوحدة الثامنة(العلاقات والدوال) أصبحت قادراً على استيعاب مفهوم العلاقة وأنواع العلاقات التي تم تناولها بالإضافة إلى الدوال وأنواعها.

وفي الوحدة التاسعة سنتطرق إلى دراسة النهايات واتصال الدالة، حيث نبحث في هذه الوحدة خواص وسلوك الدوال الحقيقية وما يرتبط بها من تعريف للنهايات.

ونظراً لأهمية النهايات، فإن الطرق العلمية المستخدمة في حساب نهاية الدوال تمكنك -عزيزي الدارس- من الإجابة عن كثير من التساؤلات حول الحلول المقبولة وغير المقبولة للدوال، وتلعب نهاية الدالة وقيمتها دوراً أساسياً في تحديد اتصال الدالة.

وسنتناول في هذه الوحدة تعريف نهاية الدالة عند قيمة معينة وإيجاد قيمة تلك النهاية، بالإضافة إلى إيجاد نهاية دالة عند اللانهاية، كما سنتطرق أيضا إلى تعريف اتصال الدالة عند نقطة معينة وشروط ذلك الاتصال.

5. إجابات التدريبات :

أولاً: العلاقات:

تدريب:1

السؤال الأول:

❖ يتم كتابة العلاقة العكسية في الصورة الآتية:

$$\because R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,5)\}$$

$$\therefore R^{-1} = \{(1,1), (3,1), (5,1), (5,2)\}$$

السؤال الثاني:

❖ العلاقة الانعكاسية على المجموعة B تكون في الصورة الآتية:

$$R = \{(2,2), (4,4), (10,10), (d,d)\}$$

تدريب2:

العلاقتين R_4 , R_3 انعكاسية لأنهما تحتويان على العناصر:

$(2 , 2) , (4 ,4) , (6 , 6)$

تدريب3:

السؤال الأول:

العلاقة المتناظرة على المجموعة A تكون في الصورة الآتية:

$R = \{(6,9),(9,9),(10,6),(6,10),(9,6)\}$

السؤال الثاني:

❖ R ليست علاقة متناظرة إذا وجد على الأقل عنصرين $a \in A \ , \ b \in A$

بحيث أن: $(a,b) \notin R \ , \ (b,a) \notin R$

□

السؤال الثالث:

❖ R_1 ليست متناظرة لأن:

$(4,2) \in R_1 \ , \ (2,4) \notin R_1$

❖ R_2 علاقة متناظرة لأن:

$(2,2) \in R_2$□

❖ R_3 ليست علاقة متناظرة لأن:

$(2,4) \in R_3 \ , (4,2) \notin R_3$

العلاقتان: ❖ R_5 , R_4 علاقتان متناظرة لأنهما تحققان التعريف.

السؤال الرابع:

كل من العلاقات السابقة متعدية لأنها تحقق التعريف ما عدا R_2 فإنها ليست متعدية لأن:

$(6,5) \in R_2 \ , \ (5,6) \in R_2 \ , \ (6,6) \notin R_2$□

□

□

ثانيًا: لـدوال:

تدريب4 :

السؤال الأول:

التكلفة الكلية لإنتاج عدد (10):

$$T.C = f(10) = (10)^3 - 30(10)^2 + 500(10) + 200$$

$= 3200$ ريال

السؤال الثاني:

1- نفرض أن عدد الأجهزة المنتجة في اليوم هو: x . وتكون تكلفة التشغيل لإنتاج الجهاز الواحد:

$$U.C = 20,000x$$

التكلفة الكلية للإنتاج كدالة في عدد الأجهزة المنتجة تكون في الصورة الآتية:

التكلفة الكلية= التكلفة الثابتة+ تكلفة التشغيل للوحدة الواحدة.

$$T.C = U.C + f.C$$

$$= 20,000x + 400,000$$

$$\therefore T.C = f(x) = 20,000x + 400,000$$

2- التكلفة الكلية لإنتاج عدد 10 أجهزة:

$$T.C = f(10) = 20000(10) + 400,000$$

$= 600,000$ ريال

وتكون تكلفة الجهاز الواحد:

$$U.C = 600,000 / 10$$

$= 60,000$ *ريال*

❖ التكلفة الكلية لإنتاج عدد 100 جهاز:

$$T.C = f(100) = 20000(100) + 400,000$$

$= 2,400,000$ ريال

❖ تكلفة الجهاز الواحد:

$$U.C = 2,400,000 / 100$$
$$= 24,000 \text{ ريال}$$

3- على افتراض أن ثمن بيع عدد x هو:

$$P = 1000x$$

الربح p :

ثمن البيع – التكلفة الكلية.

$$p = P - T.C$$
$$p = 10,000x - (20,000x + 400,000)$$
$$f(p) = 80,000x - 400,000$$

تدريب:5 السؤال الأول:

(a) دالة تزايدية. (b) دالة تناقصية. (c) دالة تزايدية.

السؤال الثاني:

(a) دالة زوجية. (b) دالة فردية.

السؤال الثالث:

(a) , (b) دالتان صريحتان. (c) , (d) دالتان ضمنيتان.

السؤال الرابع:

$$(a)\ \because\ y^2 + x^2 = 20 \quad (1) \qquad \therefore y^2 = 20 - x^2 \quad (2)$$

❖ بأخذ الجذر التربيعي لكل من طرفي العلاقة (2)، نحصل على ما يأتي:

$$y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad \therefore y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$(b)\ \because \frac{1}{x^{-2}} - \frac{1}{y^{-2}} = -\frac{1}{10^{-1}} \quad (1) \quad \therefore\ x^2 - y^2 = -10 \quad (2)\square$$

بضرب طرفي العلاقة (2) في (-) نحصل على ما يأتي:

$$y^2 - x^2 = 10 \quad (3) \qquad \therefore\ y^2 = x^2 + 10 \quad (4)\square$$

❖ بأخذ الجذر التربيعي لكل من طرفي العلاقة (4)، نحصل على ما يأتي:

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 10} \qquad \therefore y = \sqrt{x^2 + 10}\,\square$$

6. المراجع:

تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، أمل عزيزي الدارس أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
3. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988):الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
4. الجاسر، إبراهيم عبدالله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، مكتبة الملك فهد الوطنية للنشر، الرياض: المملكة العربية السعودية
5. الغرابي، سليم إسماعيل (1989): مقدمة في التحليل الرياضي، منشورات جامعة بغداد، بغداد: الجمهورية العراقية.
6. متولي، مختار محمد.(1993):الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
7. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

7. التعيينات:

السؤال الأول:

إذا كانت لدينا المجموعتين:

$D = \{7, 8, 9\}, W = \{10, 11\}$

المطلوب:

1-اكتب العلاقة: $R \subset D \times W$ 2-بين أن R علاقة D إلى W

السؤال الثاني:

إذا كانت لدينا المجموعتين:

$B = \{14, 16, 18\}, C = \{20, 22\}$

المطلوب:

1-اكتب العلاقة: R

2-اكتب العلاقة العكسية: R^{-1}

3-اكتب التمثيل السهمي لكل من العلاقتين: R, R^{-1}

السؤال الثالث:

إذا كانت لدينا المجموعة:

$M = \{10, 12, 14\}$

وحصلنا على العلاقات الآتية:

$R_1 = \{(10, 12), (14, 12), (12, 12), (12, 14)\}$

$R_2 = \{(10, 12), (12, 14), (10, 14)\}$

$R_3 = \{(10, 10), (12, 12), (12, 14), (14, 12), (14, 14)\}$

المطلوب:

- بيّن أي من العلاقات السابقة انعكاسية.
- متى تكون العلاقة R في المجموعة M ليست انعكاسية.

السؤال الرابع:

1- متى تكون العلاقة R متناظرة على المجموعة B؟

2- متى تكون العلاقة R في المجموعة ليست متناظرة.

السؤال الخامس:

إذا كانت لدينا المجموعة:

$$V = \{3 , 6 , 9 , 12\}$$

وكانت العلاقة: R كما في الصورة الآتية:

$$R = \{(3 , 6) , (9 , 12) , (6 , 3) , (9 , 9)\}$$

❖ هل العلاقة R متناظرة على المجموعة V؟

السؤال السادس:

إذا كانت لدينا المجموعة:

$$T = \{3 , 6 , 9\}$$

وحصلنا على العلاقات الآتية:

$$R_1 = \{(3 , 3) , (6 , 3) , (6 , 6) , (6 , 9) , (9 , 6)\}$$

$$R_2 = \{(3 , 3)\}$$

$$R_3 = \{(3, 6)\}$$

$$R_4 = \{(3 , 3) , (9 , 6) , (6 , 9)\}$$

$$R_5 = T \times T$$

❖ اذكر فيما إذا كانت كل من العلاقات السابقة متناظرة ولماذا؟

السؤال السابع:

❖ حدد الدوال التزايدية والدوال التناقصية في كل مما يأتي:

(a) $y = f(x) = x + 1$ (b) $y = f(x) = 2 + (-x)$

(C) $y = f(x) = x - (+8)$

❖ علماً بان x تأخذ القيم الآتية:

$$x = (-1 , 0 , 1 , 2)$$

السؤال الثامن:

❖ حدد الدوال الزوجية والدوال الفردية في كل مما يأتي:

(a) $y = f(x) = x^6$ (b) $y = f(x) = x^7$ □

السؤال التاسع:

❖ حدد الدوال الصريحة والدوال الضمنية في كل مما يأتي:

(a) $y = x^2 + 13x + 36 = 0$ (b) $y = x^2 - x = 12$

(C) $xy^3 + 2x^4y = -3$ (d) $3xy^2 = (2x + 2y)^2 - 5$

السؤال العاشر:

❖ اكتب الدالة الآتية في صورة دالة صريحة:

(a) $y^2 + x^2 = 5$

9 الوحدة التاسعة

النهايات والاتصال

محتويات الوحدة

1. المقدمة

1.1. تمهيد :

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة (النهايات والاتصال) والتي تتألف من خمسة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بتعريف النهاية، وخلفية عامة عنها بالإضافة إلى حالات عدم التعيين.

ويتناول القسم الثاني قوانين النهايات، متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن عزيزي الطالب، من استيعاب هذه القوانين المختلفة.

ويُركز القسم الثالث من هذه الوحدة على حساب نهاية دالة عند قيمة معينة، أما القسم الرابع فيتناول حساب نهاية دالة عند اللانهاية.

ويتناول القسم الخامس تعريف اتصال الدالة متضمناً الشروط الأساسية لكي تكون الدالة متصلة.. وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب مفهوم النهايات وطرق حلها. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

2.1. أهداف الوحدة :



عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية التاسعة وهي بعنوان " النهايات والاتصال " ويتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تُعرّف نهاية دالة.
2. تشرح أهمية النهايات.
3. تشرح حالات عدم التعين لدالة.
4. تذكر قوانين النهايات.
5. تحسب نهاية دالة عند قيمة معينة.
6. تحسب نهاية الدالة عند اللانهاية.
7. تعرّف اتصال الدالة.
8. تذكر شروط اتصال الدالة.

3.1. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من خمسة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الأول بالهدف الأول والثاني والثالث والذي يركز على تعريف النهايات وحالات عدم التعيين

وفي القسم الثاني تناولنا قوانين النهايات المختلفة، وهذا يحقق الهدف الرابع.

أما في القسم الثالث فقد تم التركيز على حساب نهاية الدالة عند قيمة معينة وبهذا تحقق الهدف الخامس.

وتم في القسم الرابع تناول نهاية الدالة عند اللانهاية، حيث بينا في هذا القسم أسلوب إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية.

وفي القسم الخامس تناولنا اتصال الدالة والشروط الأساسية التي يجب أن تتوافر لكي تكون الدالة متصلة عند قيمة معينة.

4.1. القراءات المساعدة:

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
3. الجاسر، إبراهيم عبدالله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، مكتبة الملك فهد الوطنية للنشر، الرياض: المملكة العربية السعودية
4. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
5. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
6. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.



5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة وأسئلةالتقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاءً من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلى تهيئتك المكان الملائم للدراسة وأن يكون لديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. النهايات والاتصال Limites:

1.2. مقدمة:

تكمن أهمية النهايات في أنها تصف سلوك الدالة $f(x)$ عندما تقترب قيمة x - ولكن لا تساويه- من نقطة معينة ولتكن a . ونحتاج إلى ذلك عندما تكون الدالة غير معرّفة عند نقطة معينة أو عندما نريد أن نعرف سلوك الدالة عندما تقترب قيمة المتغير x إلى (∞).

2.2. تعريف النهايات:

إذا كانت لدينا الدالة $f(x)$ ، فإذا أخذ المتغير x قيمة ولتكن a مثلاً ، فإن الدالة تأخذ القيمة $f(a)$ والتي نحصل عليها بالتعويض بالقيمة a بدلاً من x في صيغة الدالة، ولكن في بعض الأحيان نهتم بالقيمة التي تقترب منها الدالة عندما يقترب المتغير x من قيمة معينة، فإذا اقتربت الدالة من القيمة b عندما تقترب قيمة المتغير x من القيمة a ، فإنه يتم كتابة ذلك كما يأتي:

$$\lim_{X \to a} f(x) = b$$

وتقرأ هذه العلاقة كالآتي:

" نهاية الدالة $f(x)$ تساوي b عندما تؤول x إلى a .وقد استخدمنا الرمز $x \to a$ للتعبير عن x تؤول إلى a واستخدمنا الرمز Lim للتعبير عن النهاية.

ولتوضيح مفهوم النهايات نعتبر الدالة:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}$$

نلاحظ أن هذه الدالة تكون معرّفة على طول الخط المستقيم باستثناء النقطة ($x = 3$). وبهذا فإننا لا نستطيع إيجاد قيمة $f(3)$ ، إلا أننا نستطيع إيجاد قيمة الدالة لقيم x قريبة من (3)، تكبرها أو تصغرها بقليل. والجدول الآتي يوضح قيمة الدالة لقيم قريبة جدا من (3).

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	6.8	6.98	6.998	?	7.002	7.02	7.2

تحليل بيانات الجدول:

نلاحظ من الجدول أن قيمة الدالة تقترب من (7) عندما تقترب قيمة x من (3). ويمكننا وصف سلوك الدالة هذا بقولنا "نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب قيمة x من (3) هو (7)، ويمكن صياغة هذه العبارة رياضياً كما يأتي:

$$\lim_{x \to 7} f(x) = \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = 7$$

ويسمى اقتراب x بقيم أكبر من (3) بقليل اقتراب من جهة اليمين، في حين يسمى اقتراب x بقيم أصغر من (3) بقليل اقتراب من جهة اليسار.

ويكتب الاقتراب من جهة اليمين رياضياً على النحو الأتي:

$$\lim_{x \to 3^+} (3) = 7$$

وبطريقة مشابهة نكتب الاقتراب من جهة اليسار رياضياً كما يأتي:

$$\lim_{x \to 3^-} (3) = 7$$

وجدير بالذكر أنه عندما نقول أن x تؤول إلى a فإننا نعني بذلك أن x تقترب من a من جهة اليمين ومن جهة اليسار وبشرط ألا تساوي a وهذا يختلف عن القول أن x تساوي a.

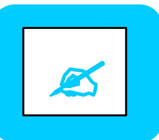
3.2. حالات عدم التعيين:

عند حل النهايات يجب التفريق بين الحلول المقبولة والحلول غير المقبولة. ونعني بكلمة مقبولة أن النتيجة صحيحة. ولكن في كثير من المواقف تقابلنا أحياناً مسائل في النهايات يؤدي تطبيق قواعد النهايات إلى حالة عدم تعيين أو بعبارة أخرى تؤدي إلى نتائج غير مقبولة مثل: $\infty - \infty$ ، ∞ / ∞ ، $0 / 0$ ، لذلك يتوجب علينا البحث عن الحل الصحيح باتباع أساليب تسبق استخدام قواعد النهايات مباشرة.

1.3.2. حالة عدم التعيين: $\left(\frac{0}{0}\right)$

تحدث حالة عدم التعيين $(0/0)$ في الدوال النسبية عندما تقترب x من القيمة a والتي تجعل كلا البسط والمقام مساوياً للصفر. ونتخلص من هذه الحالة بقسمة البسط والمقام على الكمية $(x-a)$ أو بتحليل البسط والمقام واختصار المقادير المتطابقة.

والأمثلة الآتية توضح الحالات السابقة والمعالجات المختلفة للحلول غير المقبولة.



مثال: 1

أوجد نهاية المقدار الأتي:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

الحل:

بالتعويض المباشر عن قيمة: $x = 2$ ينتج ما يأتي:

$$\lim_{x \to 2} \frac{4 - 6 + 2}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

(حل غير مقبول)

وهذه حالة عدم تعيين، ولكي يصبح الحل حل مقبول، يتم تحليل البسط واختصار المقادير المتشابه:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)}$$

$$\therefore \lim_{x \to 2} (x-1) = 2 - 1 = 1$$

(حل مقبول)

مثال2:

أوجد نهاية المقدار الأتي:

$$\because \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$$

$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \frac{4 + 2 - 6}{-2 + 2} = \frac{0}{0} \square$$

وهذه حالة عدم تعيين، وبتحليل البسط واختصار المقادير المتطابقة:

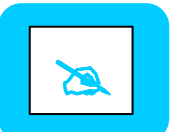
$$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)} \square$$

$$= \lim_{x \to -2} (x - 3) = -2 - 3 = -5$$

2.3.2. حالة عدم التعيين: $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

عندما يكون لدينا دالة كسرية، أي أن الدالة تتكون من بسط ومقام ويوجد في البسط والمقام دوال كثيرة حدود، فإنه عندما يؤول المتغير x إلى ∞ فإن البسط والمقام كليهما يؤولان إلى ∞. ويتحكم في قيمة الدالة الكسرية المقدار الذي يحتوي على x بأكبر أس. لذلك فإنه عند الحصول على حالة عدم تعيين من الشكل (∞/∞) فإننا نتخلص من هذه الحالة بقسمة البسط والمقام على x المرفوع لأكبر أس.

مثال3:



أوجد نهاية المقدار الأتي:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 3x + 6}{2x - 7x^2}$$

الحل:

بالتعويض المباشر عن قيمة: $x = \infty$ ينتج ما يأتي:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 3x + 6}{2x - 7x^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

وهذه حالة عدم تعيين. نلاحظ أن أكبر أس هو العدد 2 ، لذلك نقسم البسط والمقام على x^2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 3x + 6}{2x - 7x^2} =$$

$$\lim_{X \to \infty} \frac{5-3\left(\frac{1}{X}\right)+6\left(\frac{1}{X2}\right)}{2\left(\frac{1}{X}\right)-7} = \frac{5-3\times0+6\times0}{2\times0-7} = -\frac{5}{7}$$



مثال4:

أوجد نهاية المقدار الأتي:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 + 3x^4 - x^2 + 6}{5x^4 + 2x^3 - 7x}$$

الحـل:

بالتعويض المباشر عن قيمة: $x = \infty$ ينتج ما يأتي:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^5 + 3x^4 - x^2 + 6}{5x^4 + 2x^3 - 7x} = \frac{\infty}{\infty}$$

وهذه حالة عدم تعيين. نلاحظ أن أكبر أس هو العدد 5 ، لذلك نقسم البسط والمقام على x^5.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2+3\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x^3}\right)+6\left(\frac{1}{x^5}\right)}{5\left(\frac{1}{x}\right)+2\left(\frac{1}{x^2}\right)-7\left(\frac{1}{x^4}\right)} = \frac{2-3\times0+1\times0+6\times0}{5\times0+2\times0+7\times0} = \frac{2}{0} = \infty$$

3.3.2.حالة عدم التعيين: $(\infty - \infty)$

تحدث حالات عدم التعيين $(\infty - \infty)$ كنتيجة طبيعية لحاصل فرق بين مقدارين يؤول كل منهما إلى ∞ عندما تقترب قيمة x من قيمة ما. وللتخلص من هذه الحالة فإننا نسعى إلى تبسيط المقدارين أو محاولة دمج المقدارين للحصول على مقدار واحد.

مثال5:

أوجد نهايات المقدارين الآتيين:

$$(a)\ \lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \qquad (b)\ \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

الحل:

$$(a)\ \lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

بالتعويض المباشر عن قيمة: $x = \infty$ ينتج ما يأتي:

$$\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \infty - \infty$$

وهذه نتيجة حالة عدم تعيين. وللتخلص من الجذر نضرب ونقسم على المرافق.

$$\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

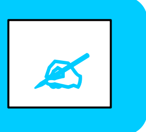
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

(حل مقبول)

$$(b)\ \because \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \infty - \infty$$

وهذه حالة عدم تعيين. نوحد المقامات لتكون النتيجة:

$$\because \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{X\to 0}\frac{1-\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{0}=\infty$$



أمثلة عامة:

مثال6:

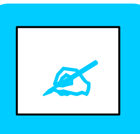
أوجد نهاية المقدار الأتي:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+2}{x+2}$$

الحـل:

بالتعويض المباشر عن قيمة: $x=2$ ينتج ما يأتي:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-2+2}{x+2}=\frac{4-2+2}{2+2}=1$$ (حل مقبول)



مثال7:

أوجد نهاية المقدار الأتي:

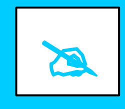
$$\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x+5}$$

الحـل:

بالتعويض المباشر عن قيمة: $x=-3$ ينتج ما يأتي:

$$\lim_{x\to -3}\frac{-3+3}{x+5}=\frac{0}{-3+5}=\frac{0}{2}=0\square$$ (حل مقبول)

مثال 8:





$$\lim_{x \to -1} \frac{3x+4}{x+1}$$

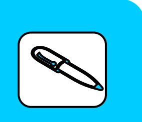
الحـل:

بالتعويض المباشر عن قيمة: $x = -1$ ينتج ما يأتي:

$$\lim_{x \to -1} \frac{3x+4}{x+1} = \frac{1}{0} = \infty$$

لا توجد نهاية.

تدريب (1)



بين الحلول المقبولة والحلول غير المقبولة لكل من الدوال الآتية:

(a) $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

(C) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-2}$

(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{4x-5}$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

؟

بين الحلول المقبولة والحلول غير المقبولة لكل من الدوال الآتية:

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+5}$

(b) $\lim_{x \to 2} (x^2-4x)$

(C) $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+4}{3x-1}$ □

4.2. قوانين النهايات:

إذا كانت لدينا الدالتين:

$$\lim_{X \to a} f_1(x) = b \quad , \quad \lim_{X \to a} f_2(x) = C$$

فان:

1 نهاية حاصل جمع أو طرح دالتين.

$$\lim_{X \to a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{X \to a} f_1(x) \pm \lim_{X \to a} f_2(x) = b \pm C$$

2 نهاية الدالة المضروبة بمقدار ثابت.

$$\lim_{X \to a} [k \cdot f_1(x)] = k \cdot \lim_{X \to a} f_1(x) = k \cdot b$$

3 نهاية حاصل ضرب دالتين.

$$\lim_{X \to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{X \to a} f_1(x) \cdot \lim_{X \to a} f_2(x) = b \cdot C$$

4 نهاية قسمة دالتين.

$$\lim_{X \to a} [f_1(x) \div f_2(x)] = \lim_{X \to a} f_1(x) \div \lim_{X \to a} f_2(x)$$

حيث: $\lim_{X \to a} f_2(x) \neq 0$

5.2. حساب نهاية دالة عند قيمة معينة:

تعريف:

يقال أن الدالة $f(x)$ تؤول للنهاية b عندما تؤول x إلى a دون أن تأخذ x القيمة a.

نظرية : (بدون برهان):

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}$$

حيث: n عدد صحيح موجب لا يساوي الصفر.

ولتطبيق النظرية السابقة يُراعى الأتي:

(1) أن تكون الدالة على صورة النظرية (أو يمكن وضعها على الصورة):

$$\frac{x^n - a^n}{x - a}$$

(2) أن يكون المطلوب إيجاد النهاية عندما:

$$x \to a$$

نتيجة: 1

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n \quad ,$$

$$n \neq 0$$

أمثلة:

أوجد نهايات الدوال الآتية:

(a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$ (b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2}$

(C) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

الحـل:

(a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3} =$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-3^4}{x-3} = 4\times(3)^{4-1} = 4\times(3)^3 = 108$$

(b) $\lim_{x\to -2}\frac{x^5+32}{x+2} =$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^5-(-2)^5}{x-(-2)} = 5\times(-2)^{5-1} = 5\times(-2)^4 = 80$$

(C) $\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} =$

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^{1/2}-9^{1/2}}{x-9} = \frac{1}{2}\times(9)^{1/2-1} = \frac{1}{2}\times(9)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\times(3)^{-1} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

□

□

□

نتيجة: 2

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \left(\frac{n}{m}\right) a^{n-m}$$

حيث: $n \ , \ m$: عددان صحيحان لا يساويان الصفر.

البرهان:

$$\because \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{\dfrac{x^n - a^n}{x - a}}{\dfrac{x^m - a^m}{x - a}}$$

وذلك بقسمة كلاً من البسط والمقام على $(x - a)$.

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}}{\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^m - a^m}{x - a}} \quad \square$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^m}{x^m - a^m} = \frac{n \ a^{n-1}}{m \ a^{m-1}} = \left(\frac{n}{m}\right) a^{n-m}$$

ملحوظة:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{n}{m} \quad , \quad (n \ , \ m \neq 0) \ \square$$

أمثلة:

أوجد نهايات الدوال الآتية:

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^5 - 243}{x^4 - 81}$ (b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x^3 - 8}$

(C) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$ (d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^7 - 128}{x^4 - 16}$

الحـل:

(a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^5 - 243}{x^4 - 81} =$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^5 - 3^5}{x^4 - 3^4} = \left(\frac{5}{4}\right) \times (3)^{5-4} = \left(\frac{5}{4}\right) \times (3)$$

$$= \frac{15}{4}$$

(b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{x^3 - 8} =$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 2^5}{x^3 - 2^3} = \left(\frac{5}{3}\right) \times (2)^{5-3} = \left(\frac{5}{3}\right) \times (2)^2$$

$$= \frac{20}{3}$$

❖ يتم وضع التمرين على صورة النتيجة

(C) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1} =$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - (1)^5}{x^3 - (1)^3} = \left(\frac{5}{3}\right) \times (1)^{5-3} = \left(\frac{5}{3}\right) \times (1)^2$$

$$= \frac{5}{3}$$

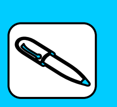
□

$$(d)\ \lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 128}{x^4 - 16} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^7 - 2^7}{x^4 - 2^4} = \left(\frac{7}{4}\right) \times (2)^{7-4} = \left(\frac{7}{4}\right) \times (2)^3$$

$$= \left(\frac{56}{4}\right) = 14$$

تدريب (2)



أوجد نهايات الدوال الآتية:

$$(a)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \qquad (b)\ \lim_{x \to 3} \frac{x - 2}{x + 2}$$

$$(C)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} \qquad (d)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

أسئلة التقويم الذاتي (2)



أوجد نهايات الدوال الآتية:

$$(a)\ \lim_{x \to -1} \frac{x^4 + x}{x + 1} \qquad (b)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}$$

$$(C)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} \qquad (d)\ \lim_{x \to 3} \sqrt{2x - 5}$$

6.2. نهاية الدالة عند اللانهاية:

يقصد بنهاية دالة عند اللانهاية هو التعرف على سلوك هذه الدالة عندما تكبر x (المتغير المستقل) إلى ما لا نهاية من الحدود. فإذا كانت الدالة $f(x)$ تقترب من عدد معين وليكن b - كلما كبرت x - فإننا نقول في هذه الحالة أن الدالة لها نهاية b عند اللانهاية، ونكتب الدالة في الصورة الآتية:

$$\lim_{X \to \infty} f(x) = b$$

ويوضح ذلك المثال الآتي:

إذا كانت لدينا الدالة الآتية:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x}$$

ندرس سلوك هذه الدالة عندما تصبح x كبيرة بدون حد، أي عندما تقترب x من اللانهاية، وذلك من خلال بيانات الجدول الآتي:

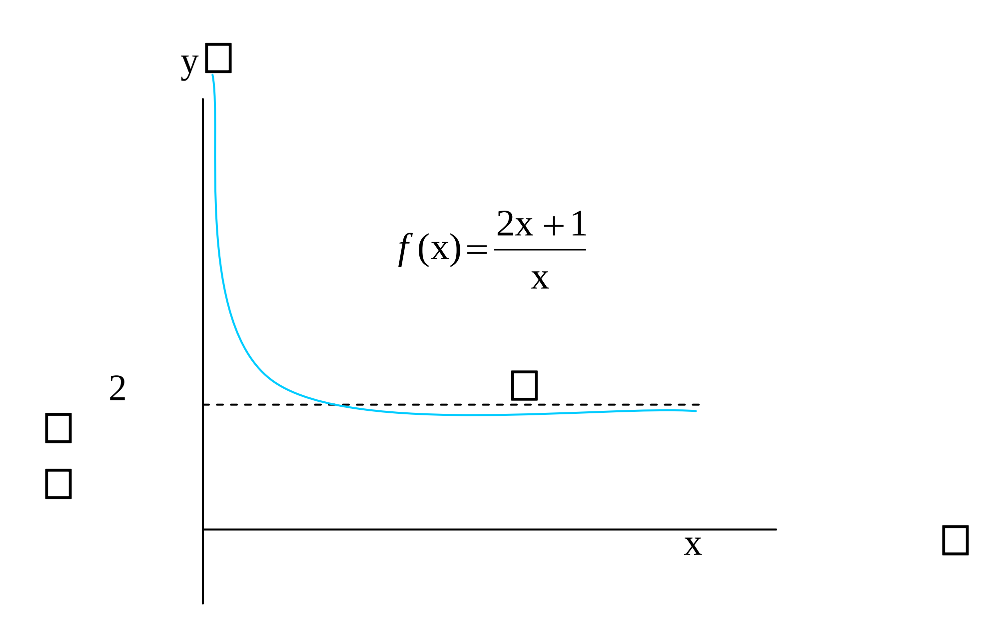
نعوض عن قيم **x** بالقيم : 1 , 10 , 100 , 1000......

x	1	10	100	1000	10000	....
$f(x)=\frac{2x+1}{x}$	3	2.1	2.01	2.001	2.0001	

ومن هذا الجدول نلاحظ أنه عندما تأخذ x قيماً متدرجة في الكبر فإن الدالة $f(x)$ تقترب أكثر وأكثر من القيمة 2 ، وبعبارة أخرى يمكن جعل الفرق بين $f(x)$ ، والعدد 2 صغيراً، وذلك باختيار x كبيرة كبراً كافياً وبدلالة النهايات فإننا نقول أن: $f(x)=2$ عندما: $x \to \infty$ ونكتب ذلك في الصورة الآتية:

$$\lim_{X \to \infty} f(x) = 2$$

والشكل البياني للدالة: $f(x) = \frac{2x+1}{x}$ كما هو موضح بالشكل.



ولإيجاد نهاية دالة كسرية عند اللانهاية نتبع الآتي:

1. نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير x مرفوعاً لأكبر قوة له في الدالة.
2. نستخدم خواص النهايات لنحصل على النهاية المطلوبة (إن وجدت).

أمثلة:

أوجد نهايات الدوال الآتية:

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x-5}{3x-7}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2-3x+4x^2}{2x-5x^2}$

(C) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2-5x}{2x^3-6x^2+4x-1}$

(d) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5-2x^2}{x^4+3x^3-1}$

الحـل:

❖ بقسمة كلٍ من البسط والمقام على: x

$$(a)\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{3x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-5(\frac{1}{x})}{3-7(\frac{1}{x})}=\frac{2-5\times0}{3-7\times0}=\frac{2}{3}\square$$

❖ بقسمة كلٍ من البسط والمقام على: x^2

$$(b)\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x+4x^2}{2x-5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-3(\frac{1}{x})+4}{2(\frac{1}{x})-5}=\frac{6-0+4}{0-5}=\frac{10}{-5}=-2$$

❖ بقسمة كلٍ من البسط والمقام على: x^3

$$(C)\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x}{2x^3-6x^2+4x-1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3(\frac{1}{x})-5(\frac{1}{x^2})}{2-6(\frac{1}{x})+4(\frac{1}{x^2})-(\frac{1}{x^3})}=$$

$$=\frac{3\times0-5\times0}{2-6\times0+4\times0-0}=\frac{0}{2}=0$$

❖ بقسمة كلٍ من البسط والمقام على: x^5

$$(d)\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{x^5-2x^2}{x^4+3x^3-1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2(\frac{1}{x^3})}{(\frac{1}{x})+3(\frac{1}{x^2})-(\frac{1}{x^5})}=\frac{1-0}{0+0-0}=\frac{1}{0}=\infty$$

تدريب (3)

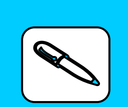
أوجد نهايات الدوال الآتية:

(a) $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{6+x-3x^2}$

(b) $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{x^4+3x^2+1}{x^4+2x}$

(C) $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{x(x^2-5x+6)}{2x^3-4x}$

(d) $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{3x+7}{\sqrt{4x^2+5}}$



أسئلة التقويم الذاتي (3)

؟

أوجد نهايات الدوال الآتية:

(a) $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{2x^5+1}{x^2+4x^5+3x^2}$

(b) $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{(2x^2+3)(x-1)}{3x^3-4x^2}$

(C) $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{(2x+3)(x-1)(x-2)}{x(x+1)(3x-1)}$

(d) $\lim\limits_{X\to\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{9x^2-1}}$

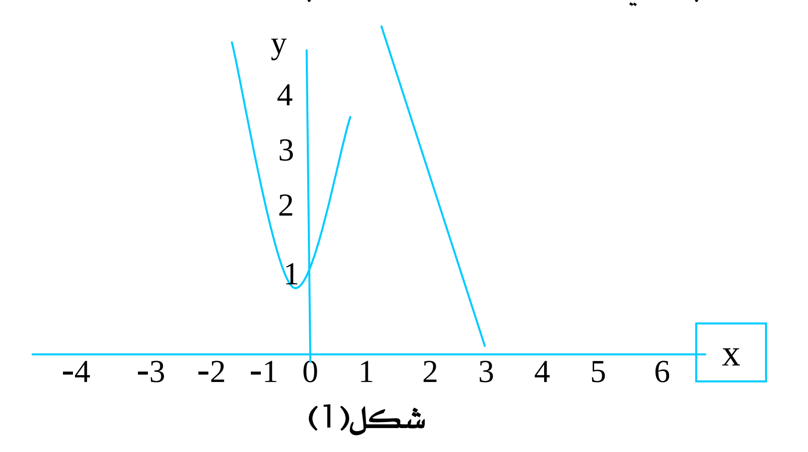
3. اتصال الدوال:

اتصال الدالة:
يقصد به عدم انفصال أو انقطاع في الدالة.

أسباب عدم اتصال الدالة:

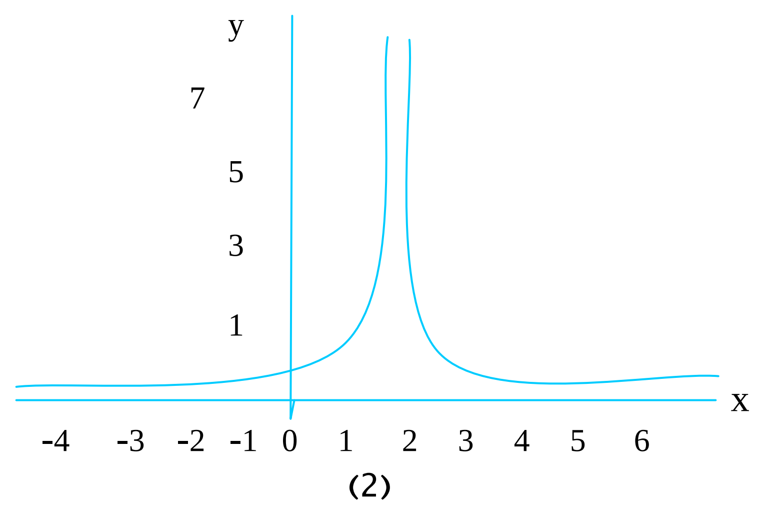
- **عدم تعريف الدالة عند نقطة ما.**
- **وجود فاصل في الدالة.**
- **ابتعاد قيمة الدالة عند نقطة ما عن المسار الهندسي للدالة في المنطقة المجاورة لهذه النقطة.**

يعني اتصال الدالة أنه لا يوجد انفصال أو انقطاع في الدالة. فإذا كانت الدالة معرّفة في الفترة $(a\ ,\ b)$، فإن التمثيل البياني لا يحتوي على أي انقطاع أو انفصال في هذه الفترة. ويحدث الانفصال لأسباب مختلفة، فقد يكون الانفصال ناتج عن وجود خطوط التقارب الرأسية والتي تجعل الدالة غير معروفة القيمة عند نقطة ما، أو بسبب وجود فاصل في الدالة ناتج من تعريف الدالة، أو بسبب أن قيمة ما تبتعد عن المسار الهندسي للدالة في المنطقة المجاورة لهذه النقطة.



شكل(1)

الدالة في الشكل (1) غير متصلة بسبب وجود انقطاع في الدالة، وهذا الانقطاع ناتج من تعريف الدالة على فترتين. أدى تعريف الدالة بهذه الصورة إلى عدم وجود نهاية للدالة عندما تقترب $x \to 1$.



(2)

ونلاحظ من الشكل رقم (2) أن الدالة غير متصلة عند $(x = 2)$ بسبب وجود خط تقارب رأسي، وتحدث هذه الحالة عندما تكون لدينا دالة كسرية تكون قيمة المقام تساوي صفر عندما $(x = 2)$، في حين أن البسط لا يساوي صفر عندما $(x = 2)$.

1.3. تعريف الاتصال:

يقال أن الدالة: $f(x)$ متصلة عند النقطة: $x = a$ ، إذا تحققت الشروط الآتية:

(1) أن تكون الدالة معرّفة القيمة عند: $x = a$ ، أي يمكن إيجاد $f(a)$

(2) أن تكون للدالة $f(x)$ نهاية عند ما تقترب x من a ، أي أنه يمكن إيجاد $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

(3) أن تكون: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

بمعنى، أن تكون نهاية الدالة عند: $x = a$ تساوي قيمة الدالة نفسها عند: $x = a$

وبناءً على التعريف السابق فإن الدالة تكون غير متصلة في الحالات الآتية:

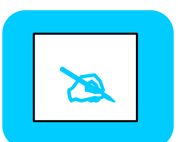
(1) أن تكون الدالة: $f(x)$ غير معروفة عند: $x = a$

(2) أن تكون الدالة $f(x)$ معروفة عند: $x = a$ ، ولكن لا توجد نهاية للدالة.

(3) أن تكون الدالة معروفة عند: $x = a$ وأن تكون النهاية موجودة ولكن:

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

مثال9:



ابحث عن اتصال الدالة الآتية:

$$f(x) = 3x^2 - x + 5 \quad \text{عند} \quad \to \Big|_{x=1}$$

الحل:

تكون الدالة متصلة إذا تحققت الشروط المذكورة في تعريف الاتصال.

❖ **يتم إيجاد قيمة الدالة عند: $x = 1$**

$$\therefore f(1) = 3 \times 1 - 1 + 5 = 7$$

إذا تحقق الشرط الأول واستطعنا إيجاد قيمة الدالة عند النقطة المحددة.

❖ يتم إيجاد نهاية عند: $x=1$ ، ونوضح ذلك كما يأتي:

$$\lim_{x\to 1} (3x^2 - x + 5) = 3 - 1 + 5 = 7$$

❖ الشرط الثاني متحقق، بمعنى أنه توجد نهاية للدالة وتساوي: 7

وبذلك فإن الشرط الثاني تحقق. وحيث أن: $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 7$

وهو الشرط الثالث، لذا فإن الدالة متصلة عند $(x=1)$.



مثال10:

ابحث عن اتصال الدالة:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{عند} \quad \to \Big|_{x=3}$$

الحـل:

❖ يتم إيجاد قيمة الدالة عند: $x=3$

$$\therefore f(3) = \frac{3+1}{2} = 2$$

إذا تحقق الشرط الأول واستطعنا إيجاد قيمة الدالة عند النقطة المحددة.

❖ يتم إيجاد نهاية الدالة عند: $x=3$ ، ونوضح ذلك كما يأتي:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3+1}{3-1} = 2$$

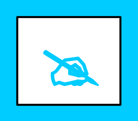
❖ الشرط الثاني متحقق، بمعنى أنه توجد نهاية للدالة وتساوي 2

وبذلك فإن الشرط الثاني تحقق. وحيث أن: $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$ وهو

الشرط الثالث، لذا فإن الدالة متصلة عند $(x=3)$.

مثال11:





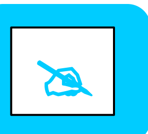
$$f(x)=\frac{1}{x} \quad \text{عند} \quad \rightarrow \Big|_{X=0}$$

الحـل:

نظراً لأن الدالة تأخذ القيمة: ∞ عند: $x=0$ فتكون غير معرّفة عند هذه النقطة وبالتالي فهي غير متصلة.

مثال 12:

ابحث عن اتصال الدالة الآتية:



$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+1} \quad \text{عند} \quad \rightarrow \Big|_{X=-1}$$

الحـل:

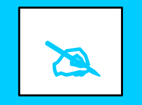
❖ **يتم إيجاد قيمة الدالة عند:$x=-1$**

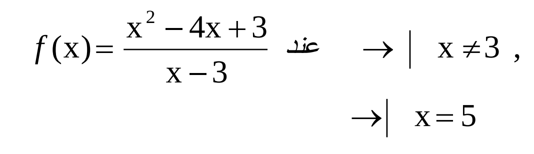
$$\therefore f(-1)=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

إذا الشرط الأول لم يتحقق، بمعنى لا توجد قيمة محددة للدالة عند$x=-1$ ، وبالتالي تكون الدالة غير معرّفة، وبناءً عليه فإن الدالة غير متصلة.

مثال13:

ابحث عن اتصال الدالة:





$$f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-3} \quad \text{عند} \quad \rightarrow \big|\ x\neq 3\ ,$$
$$\rightarrow \big|\ x=5$$

الحـل:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} (x-1) = 3-1 = 2 \quad ,$$

$$\because f(x) = f(3) = 5$$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

ونستنتج من ذلك أن الدالة غير متصلة عند: $x = 3$ وذلك لعدم تحقق الشرط الثالث

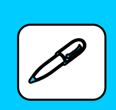
تدريب (4)

ابحث عن اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

(a) $f(x) = \frac{x^2-2x-8}{x-2} \to x = 2$ (b) $f(x) = \frac{x+1}{x-2} \to x = 3$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \to x<1 \\ 2-x & \to x \geq 1 \end{cases}$

□



أسئلة التقويم الذاتي (4)

ابحث عن اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

(a) $f(x) = x^2+x-2 \to x = 1$ (b) $f(x) = \frac{x^2-x}{x} \to x = 0$

(C) $f(x) = \begin{cases} x-x & \to x \leq 2 \\ 3-x & \to x > 2 \end{cases}$ عند $x=2$ (d) $f(x) = \frac{x^2-x-12}{x-4}$

?

4. الخلاصة:

تناولت هذه الوحدة النهايات والاتصال، حيث اشتملت على تعريف النهاية وبينا أنه يمكن التعبير عن نهاية الدالة في الصورة:

$$\lim_{X \to a} f(x) = b$$

وتقرأ هذه العلاقة: نهاية $f(x)$ تساوي b عندما تؤول x إلى a.

وقد استخدمنا الرمز $a \to x$ للتعبير عن x تؤول إلى a واستخدمنا الرمز Lim للتعبير عن النهاية.

وعند حل النهايات يجب التفريق بين الحلول المقبولة والحلول غير مقبولة، حيث بينا أن الحلول المقبولة تكون نتائجها في إحدى الصور الآتية.

(1) عدد ما. (2) صفر. (3) ∞.

أما بالنسبة للحلول غير المقبولة فإن نتائجها تكون في إحدى الصور الآتية:

$$(1)\ \frac{0}{0}\ ،\ (2)\ \frac{\infty}{\infty}\ ،\ (3)\ \infty - \infty.$$

كما تعرضنا لقواعد النهايات المختلفة، والتي تعد المرتكز الأساسي لحساب نهاية الدالة عند قيمة معينة. وعرّفنا نهاية الدالة في هذه الحالة كما يأتي:

"يقال أن الدالة $f(x)$ تؤول للنهاية b عندما تؤول x إلى a دون أن تأخذ x القيمة a".

وتناولنا في هذه الوحدة أيضاً حساب نهاية الدالة عند اللانهاية، وبينا سلوك الدالة في هذه الحالة عندما تكبر x (المتغير المستقل) كبراً بلا حد. فإذا كانت الدالة $f(x)$ تقترب من عدد معين وليكن b كلما كبرت x. فإننا نقول في هذه الحالة أن الدالة لها نهاية b عند اللانهاية، ونكتب الدالة في الصورة الآتية:

$$\lim_{X \to a} f(x) = b$$

وبينا في هذه الوحدة أهم تطبيقات النهايات، وهي دراسة اتصال الدالة واستمراريتها، حيث تم تعريف اتصال الدالة عند نقطة معينة، بالإضافة إلى شروط اتصال الدالة وهي:

(1) أن تكون الدالة معرّفة عند: $x = a$ (2) أن تكون الدالة لها نهاية عند: $x = a$

(3) أن تكون: $\lim_{X \to a} f(x) = f(a)$ ، بمعنى أن تكون نهاية الدالة عند: $x = a$ تساوي قيمة الدالة نفسها. عند: $x = a$

5. لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية العاشرة:

عزيزي الدارس، بعد دراستك للوحدة التاسعة (النهايات والاتصال)، أصبحت قادراً على فهم نهايات الدوال عند قيمة معينة وعند اللانهاية بالإضافة إلى استيعابك لسلوك الدالة واتصالها من عدمه.

وفي الوحدة العاشرة سنتطرق إلى دراسة التفاضل الذي يبحث في معدل التغير لمتغير ما عندما يكون التغير في المتغير الأخر صغيراً جداً.

ونظراً لأهمية التفاضل في كثير من التطبيقات العلمية فقد أطلق مسمى تفاضل الدالة للإشارة إلى معدل التغير اللحظي للدالة. والطرق العلمية المستخدمة في حساب التفاضل تمكنك عزيزي الدارس، من الإجابة على كثير من التساؤلات حول معدلات التغير، عند دراسة الحالات التي يكون فيها معدل التغير غير ثابت. فعلى سبيل المثال، قد يرغب مدير شركة ما معرفة التغير في المبيعات عندما تتغير تكاليف الدعاية.

وسنتناول في هذه الوحدة تعريف التفاضل وقواعده، وأسلوب إيجاد المشتقة الأولى للعديد من الدوال بالإضافة إلى تفاضل الدالة الأسية واللوغارتيمية، كما سنتناول أيضا التفاضل من رتب أعلى.

6. إجابات التدريبات:

تدريب (1):

$$(a)\ \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \frac{0}{0}$$

بالتعويض المباشر نلاحظ أن الناتج "حل غير مقبول".

ولكي يكون الحل حلاً مقبولاً يتم تحليل المقام واختصار المقادير المتشابه، كما في الصورة الآتية:

$$\because \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

$$\therefore \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \frac{1}{7}$$

(b) $\because \lim_{X\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \frac{0}{0}$ □

بالتعويض المباشر نلاحظ أن الناتج "حل غير مقبول".

ولكي يكون الحل حلاً مقبولاً يتم تحليل البسط واختصار المقادير المتشابه، كما في الصورة الآتية:

$$\because \lim_{X\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \lim_{X\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} =$$

$$\lim_{X\to 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty \text{ , no limit exists}$$

❖ بالتعويض المباشر عن قيمة: $x = 2$

$$\text{(C)} \quad \lim_{X\to 2} \frac{x-2}{x^2-2} = \frac{0}{4-2} = \frac{0}{2} = 0$$

❖ بقسمة كل من البسط والمقام على: x.

$$\text{(d)} \quad \lim_{X\to\infty} \frac{2x+3}{4x-5} = \lim_{X\to\infty} \frac{2+(\frac{3}{x})}{4-(\frac{5}{x})} = \frac{2+0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

تدريب: 2

❖ يتم تطبيق النظرية.

$$\text{(a)} \because \lim_{X\to 3} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim_{X\to 3} \frac{x^3-3^3}{x-3} = 3(3)^{3-1}$$

$$= 27$$

❖ بالتعويض المباشر.

$$(b)\ \therefore \lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+2}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+2}=\frac{3-2}{3+2}$$

$$=\frac{1}{5}$$

❖ بالتعويض المباشر.

$$(C)\ \therefore \lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+4}=\lim_{x\to -2}\frac{4-4}{4+4}=\frac{0}{8}$$

$$=0$$

❖ يتم تطبيق نتيجة(1).

$$(d)\ \therefore \lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3^3}{x^2-3^2}=\left(\frac{3}{2}\right)(3)^{3-2}$$

□

$$=\frac{9}{2}$$

□

تدريب: 3

❖ بقسمة كل من البسط والمقام على : x^2

$$(a)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{6+x-3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+3\left(\frac{1}{x^2}\right)}{6\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)-3}=$$

$$\frac{2+0}{0+0-3}=\frac{2}{-3}$$

❖ بقسمة كل من البسط والمقام على : x^4

$$(b)\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2+1}{x^4+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+3\left(\frac{1}{x^2}\right)+\left(\frac{1}{x^4}\right)}{1+2\left(\frac{1}{x^3}\right)}=$$

$$\frac{1+0+0}{1+0}=1$$

❖ يتم ضرب ما بداخل القوس في: x

$$(C) \therefore \lim_{x \to \infty} \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{2x^3 - 4x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2x^3 - 4x} \square$$

$\square$

❖ بقسمة كل من البسط والمقام على: x^3 ينتج ما يأتي:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{2x^3 - 4x} = \frac{1 - 5(\frac{1}{x}) + 6(\frac{1}{x^2})}{2 - 4(\frac{1}{x^2})} = \square$$

$$\frac{1+0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

❖ بالقسمة على: $x = \sqrt{x^2}$

$$(d) \therefore \lim_{x \to \infty} \frac{3x + 7}{\sqrt{4x^2 + 5}} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 + 7(\frac{1}{x})}{\sqrt{4 + \frac{5}{x^2}}} = \frac{3 + 0}{\sqrt{4 + 0}} = \frac{3}{2}$$

تدريب4:

$$(a)\ \ f(x)=\frac{x^2-2x-8}{x-2}\quad \to x=2$$

الحـل:

الدالة في هذا المثال دالة نسبية ، لذلك فإن الدالة غير معرفة عند جميع النقاط التي تجعل المقام يساوي صفراً. ويساوي المقام صفراً فقط عندما $x=2$ ، لذلك فإن الدالة غير معرفة عند $x=2$ ، وبذلك فإنها غير متصلة عند هذه النقطة.

$$(b)\ \ f(x)=\frac{x+1}{x-2}\quad \to x=3$$

الحـل:

للتأكد من اتصال الدالة من عدمه عند النقطة $x=3$ ، نبحث تحقق الشروط الثلاثة المذكورة في تعريف الاتصال. نبدأ بحساب قيمة الدالة عند النقطة المحددة.

$$\therefore f(3)=\frac{4}{1}=4$$

وبذلك فإن الشرط الأول تحقق. والخطوة الثانية هي إيجاد نهاية الـدالة عندما تقترب $x \to 3$

$$\lim_{X\to 3}=\frac{x+1}{x-2}=\frac{4}{1}=4$$

وبذلك تحقق الشرط الثاني وهو وجود نهاية الدالة عندما تقترب x من 3. وحيث أن:

$$\lim_{X\to 3} f(x)=f(3)=4$$

إذا فإن الدالة متصلة عند $x=3$

$$(C)\ \ f(x)=\begin{cases} x+1 & \to\ x<1 \\ 2-x & \to\ x\ge 1 \end{cases}$$

الحـل:

نلاحـظ أن الدالـة معرفـة علـى جـزئيين، فالدالـة $f(x)$ عنـدما $(x < 1)$، أمـا عندما تكـون $(x \geq 1)$ فان: $f(x) = 2 - x$. ويعطي تعريف الدالة بهذه الصـورة إمكـانية انفصال الدالة عند: $x = 1$. لذلك ينبغـي علينـا بحـث اتصـال الدالـة فقـط عند هذه النقطة. وللتأكـد مـن تحقق شـروط الاتصـال نوجد: $f(1) = 2 - 1 = 1$ وبسبب وجود اختلاف في صيغة الدالة في الفترة التي تكون فيها $(x \geq 1)$ عن صيغة الدالة في الفترة التي تكـون فيهـا $(x < 1)$، لـذلك فإنـه يجـب أن نوجـد نهايـة الدالـة عندما تقترب x إلى 1 من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (2 - x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$$

وحيـث أن: $\lim_{x \to 1^-} (x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$ ، إذا لا توجـد للدالـة نهايـة. وهـذا يعني أن الدالة غير متصلة لعدم توافر الشرط الثاني من شروط الاتصال.

7. المراجع:

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، غير محدد الطبعة، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. .أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
3. الجاسر، إبراهيم عبدالله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، مكتبة فهد الوطنية للنشر، الرياض: المملكة العربية السعودية.
4. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
5. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
6. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

8. التعيينات:

السؤل الأول:

أوجد نهايات الدوال الآتية:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 3x}{2x}$

(b) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$

(C) $\lim_{x \to -1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x + 1}$

(d) $\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 + 7x + 12}$

(e) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

(f) $\lim_{x \to 1/2} \frac{2x^3 - 7x^2 + 5x - 1}{2x - 1}$

السؤل الثاني:

أوجد نهايات الدوال الآتية:

(a) $\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 81}{x + 3}$

(b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9x + 16} - 4}{x}$

(C) $\lim_{x \to 2} \frac{x^6 - 64}{x - 2}$

(d) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 3} - \frac{8}{x - 3} \right)$

(e) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{x - 2}$

(f) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x - 3}}$

(g) $\lim\limits_{X \to -2} \dfrac{x^7 + 128}{x^4 - 16}$

(h) $\lim\limits_{X \to -1} \dfrac{x^7 + 1}{x^5 + 1}$

السؤال الثالث:

أوجد نهايات كلاً مما يأتي:

(a) $\lim\limits_{X \to \infty} \dfrac{x + 5}{x - 2}$

(b) $\lim\limits_{X \to \infty} \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 2}$

(C) $\lim\limits_{X \to \infty} \dfrac{x^4 - 2x^3 - 5}{x^3 - 2x^4 + x}$

(d) $\lim\limits_{X \to \infty} \dfrac{(2x + 3)(3x - 1)}{(3x + 5)(x - 4)}$

(e) $\lim\limits_{X \to \infty} \dfrac{3x \quad + 7}{\sqrt{4x^2 + 5}}$

(f) $\lim\limits_{X \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + 2} - 3x\right) \sqrt{4x^2 + 1}$

السؤال الرابع:

ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

(a) $f(x) = x - 2 \quad \Big|_{X=0}$

(b) $f(x) = x^2 + x - 3 \quad \Big|_{X=-1}$

(C) $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} \quad \Big|_{X=-2}$

(d) $f(x) = \dfrac{x(x + 1)}{x - 1} \quad \Big|_{X=3}$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x} \quad \Big|_{X=0}$

(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 12}{x - 4} \quad \Big|_{X=-3}$

(g) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1} \quad \Big|_{X=2}$

(h) $f(x) = 3x^2 + 2 \quad \Big|_{X=0}$ □

الوحدة العاشرة 10

التفاضل

محتويات الوحدة

1. المقدمة

1.1. تمهيد :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى هذه الوحدة(التفاضل) والتي تتألف من أربعة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بتعريف التفاضل، وخلفية عامة عنه.

ويتناول القسم الثاني قواعد التفاضل والصور المختلفة لتلك القواعد، متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن عزيزي الطالب، من استيعاب تلك القواعد.

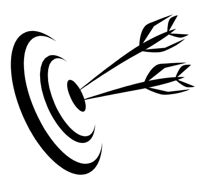
ويُركز القسم الثالث من هذه الوحدة على تفاضل الدوال الأسية واللوغارتيمية.

أما القسم الرابع فيتناول التفاضل من رتب أعلى. ويتناول القسم الخامس حل المعادلات الخطية في حالة مجهولين وثلاثة مجاهيل باستخدام المحددات والمصفوفات. وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب مفهوم التفاضل وطرق حلها. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

2.1. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية العاشرة وهي بعنوان " التفاضل " والذي يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تُعرّف التفاضل.
2. تشرح أهمية التفاضل.
3. تشرح قواعد التفاضل.
4. تحسب المشتقة الأولى لدالة ما.
5. تحسب المشتقة الأولى للدالة الآسية.
6. تحسب المشتقة الأولى للدالة اللوغارتيمية.
7. تعرف المشتقة من رُتب أعلى لدالة ما.
8. تحسب المشتقة من رُتب لدالة ما.



3.1. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من أربعة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث أرتبط القسم الأول بالهدف الأول، والذي يركز على تعريف التفاضل.

وفي القسم الثاني تناولنا تعريف قواعد التفاضل، والصور العامة لتلك القواعد واحد، وهذا يحقق الهدف الثالث.

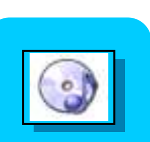
أما في القسم الثالث فقد تم التركيز على تفاضل الدوال العامة، وبهذا تحقق الهدف الرابع.

وفي القسم الرابع تناولنا تفاضل الدالة الأسية واللوغارتيمية، حيث بينا في هذا القسم أسلوب اشتقاق تلك الدوال، وفي القسم الخامس تناولنا الاشتقاق من رتب أعلى لدالة ما.

4.1. القراءات المساعدة:

تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، آمل -عزيزي الدارس- أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
3. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
4. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.



5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالاتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة وأسئلة التقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاءً من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلى التأكد من تهيئتك المكان الملائم للدراسة وأن يكون لديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. التفاضل :

2. 1. تعريف معامل التفاضل الأول:

إذا كان لدينا متغيران x , y وكان المتغير y يتبع في تغيراته المتغير x ، أي أنه إذا كان المتغير x متغيرا مستقلاً وكان المتغير y متغيراً تابعاً ، فإن العلاقة بينهما يمكن تمثيلها بالصيغة الآتية :

$$y = f(x)$$

وتقرأ y دالة (function) للمتغير x . فإذا افترضنا أن x تغيرت بمقدار قدره Δx وتبع ذلك تغيراً في y قدره Δy ، فإن نسبة التغير في y إلى التغير في x تكتب كالأتي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ولو افترضنا أن التغير في x اقترب من الصفر: $\Delta x \to 0$ فإن النهاية التي يؤول إليها $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$ تسمى معامل التفاضل الأول أو المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ بالنسبة للمتغير x . وعادة ما يرمز لها بأحد الرموز:

$$\frac{dy}{dx} \quad or \quad f^{/}(x)$$

وعليه فإن :

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وتسمى عملية إيجاد مشتقة الدالة $y = f(x)$ بعملية تفاضل الدالة.

المشتقة الأولى للدالة:
إذا كانت لدينا الدالة:
$y = f(x)$
فإن المشتقة الأولى للدالة هو: $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2.2. قواعد التفاضل:

القاعدة (1):

إذا كانت:

$$y = x^n$$

فإن:

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$



أمثلة:

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = x^3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$

(b) $y = x \rightarrow \frac{dy}{dx} = (1)\,x^{1-1} = 1x^0 = 1$

(C) $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{1-1/2} = x^{1/2}$$

(d) $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -1(x)^{-1-1} = -x^{-2} \quad \square$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

القاعدة (2):

تفاضل المقدار ثابت يساوى صفراً:

إذا كانت:

$y = k$ ، وكان k: مقدارا ثابتاً، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة (3):

تفاضل حاصل جمع عدد محدود من الدوال القابلة للتفاضل=

يساوي مجموع تفاضل هذه الدوال

إذا كانت:

$$y = u(x) + v(x) + w(x)$$

فإن:

$$\frac{dy}{dx} = u'(x) + v'(x) + w'(x)$$

مثال:1



أوجد المعامل التفاضلي الأول للدالة:

$$y = 6 + x^3 + \sqrt{x} + 3x^4$$

الحـل:

يتم تحويل الصورة الجذرية إلى صورة آسية:

$$\because y = 6 + x^3 + \sqrt{x} + 3x^4 \rightarrow y = 6 + x^3 + x^{1/2} + 3x^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-1/2} + 12x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 12x^3 \square$$

مثال:2



أوجد المعامل التفاضلي الأول للدالة:

$$y = x + 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}$$

الحـل:

$$\because\ y = x + 2\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow y = x + 2(x)^{1/3} + x^{-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{3}x^{-2/3} - x^{-3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{2}{3x^{2/3}} - \frac{1}{x^3} \square$$

تدريب (1)

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

(a) $y = 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 4$

(b) $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

(C) $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3}$

(d) $y = 1 + x^{-2} + x^3$

أسئلة التقويم الذاتي (1)

?

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = x + 2x^2 - x^3 + 5$

(b) $y = 3x^{-2} + \frac{1}{x^2}$

(C) $y = 3\sqrt{x} + 6x^{1/3}$

(d) $y = 2 + x^{-3} + x^{-1} \square$

القاعدة (4):

تفاضل حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق=

مشتقة الدالة الأولى × الدالة الثانية + مشتقة الدالة الثانية × الدالة الأولى.

إذا كانت: $y = u\,v$ ،

وكانت كل من u , v دالة للمتغير x ، فإن:

$$\frac{dy}{dx} = u'v + v'u$$

أمثلة:

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

(a) $y = (x^2+3)(2x^3-5)$ (b) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^3-3\right)$

الحل:

(a) $y = (x^2+3)(2x^3-5)$

$\because y = (x^2+3)(2x^3-5)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left[\frac{d}{dx}(x^2+3)\right] \times (2x^3-5) + \left[\frac{d}{dx}(2x^3-5)\right] \times (x^2+3)$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = 2x(2x^3-5) + 6x^2(x^2+3)$$

(b) $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^3-3\right)$

الحل:

$$\because y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^3-3\right) \to (x + x^{-1})(x^3-3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left[\frac{d}{dx}(x+x^{-1})\right] \times (x^3-3) + \left[\frac{dy}{dx}(x^3-3)\right] \times (x + x^{-1})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (1 - x^{-2})(x^3 - 3) + 3x^2 (x + x^{-1}) \square$$

القاعدة (5):

تفاضل قسمة دالتين قابلتين للاشتقاق =

المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام ÷ مربع المقام.

إذا كانت: $y = \frac{u}{v}$ وكانت كل من u , v دالة للمتغير x فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \times u' - u v'}{v^2}$$



أمثلة:

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

(a) $y = \frac{3x - 4}{2x + 5}$

الحـل:

$$\because y = \frac{3x - 4}{2x + 5}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(2x + 5)(3) - (3x - 4)(2)}{(2x + 5)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x + 15 - 6x + 8}{(2x + 5)} = \frac{23}{(2x + 5)^2}$$

$$(b)\ \ y=\frac{x}{2x+1}$$

الحـل:

$$\because\ y=\frac{x}{2x+1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(2x+1)\ (1)-(x)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2}=\frac{1}{(2x+1)^2}$$

$$(C)\ \ y=\frac{1}{x-2}$$

الحـل:

$$\because\ y=\frac{1}{x-2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(x-2)\ (0)-(1)(1)}{(x-2)^2}=\frac{-1}{(x-2)^2}$$

تدريب (2)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

$(a)\ \ y=(x+1)(x^2-1)$ $\qquad$ $(b)\ \ y=(2x^2-1)(x+1)$

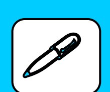
$$(C)\ \ y=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2-3\right)$$

تدريب (3)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = \frac{3-2x}{3+2x}$ (b) $y = \frac{x^2-1}{x+1}$

(C) $y = \frac{x}{2x+1}$ (d) $y = \frac{1}{x-1}$



أسئلة التقويم الذاتي (2)

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = (x^3-1)(x+2)$ (b) $y = x(x-3)(x^2-1)$

(C) $y = \frac{x^3+2}{x^2-1}$ (d) $y = \frac{2x+2}{x-1}$

(g) $y = \frac{x^2+1}{x^2+2}$

?

القاعدة (6):

تفاضل الدالة المركبة (أو دالة الدالة) =

الأس × (الدالة نفسها مطروحا واحد صحيح من أس الدالة) × مشتقة الدالة ما بداخل القوس

إذا كانت: $y = [f(x)]^n$ ، فان:

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} \times f'(x)$$

أمثلة:

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = (x^2 + 2x)^2$ (b) $y = (2x^3 + 3x + 2)^4$

(C) $y = (x + x^2 + 3)^{-2}$ (d) $y = \sqrt{2x + 3}$

الحـل:

(a) $\because y = (x^2 + 2x)^2$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2(x^2 + 2x) \times (2x + 2)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2(2x + 2)(x^2 + 2x)$

(b) $\because y = (2x^3 + 3x + 2)^4$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(2x^3 + 3x + 2)^3 \times (6x^2 + 3 + 0)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(6x^2 + 3) \times (2x^3 + 3x + 2)^3$

(C) $\because y = (x + x^2 + 3)^{-2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -2(x + x^2 + 3)^{-3} \times (1 + 2x + 0)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = -2(1 + 2x) \times (x + x^2 + 3)^{-3}$

$$(d)\because y=\sqrt{2x+3} \quad \rightarrow \quad (2x+3)^{1/2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(2x+3)^{-1/2} \times 2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1\times 2}{2}(2x+3)^{-1/2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

2 .3. تفاضل الدالة الأسية واللوغارتيمية:

2 .3 .1. تفاضل الدالة اللوغاريتمية.

$$\frac{d}{dx}(Log_a\ u)=\frac{d}{du}(Log_a\ u\ \frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}Log_a\ e\frac{du}{dx}$$

$$\text{when } a=e\ ,\ Log_a\ e=Log_e\ e=1$$

فإن:

$$\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

ملاحظة:

إذا كانت:

$$y=Log_e\ u(x)$$

فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

2 .3 .2. تفاضل الدالة الأسية:

إذا كانت: $y = e^{X}$

فإن:

$$\frac{dy}{dx} = e^{X}$$

أمثلة:

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = \text{Log}_e (2x^2 - 6)$

(b) $y = \text{Log}_e \ x^5$

(C) $y = \text{Log}_e \ 2x^3$

(d) $y = \text{Log}_e \ (x^3 + 3)$

(e) $y = e^{X}$

(f) $y = e^{(X^2 + 3X + 2)}$

(g) $y = \ln (x + 2)^3$

الحـل:

(a) $\because \ y = \text{Log}_e (2x^2 - 6) \quad \because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(2x^2 - 6)}$$

(b) $\because \ y = \text{Log}_e \ x^5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^5}(5x^4) = \frac{5}{x}$$

(c) $\because \ y = \text{Log}_e \ 2x^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x^3}(6x^2) = \frac{3}{x}$$

(d) $\because y = Log_e\ (x^3 + 3)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^3 + 3)}(3x^2)$$

(e) $\because y = e^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x(1) = e^x$$

❖ الدالة نفسها × مشتقة الأس.

(f) $\because\ y = e^{(x^2+3x+2)}$

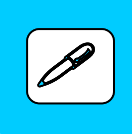
$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{(x^2+3x+2)} \times (2x+3)$$

❖ يلاحظ أن مشتقة الدالة الأسية= الدالة نفسها × مشتقة الأس.

(g) $\because y = \ln(x+2)^3 = 3\ln(x+2)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x+2}$$

تدريب (4)



أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

(a) $y = (x^2 + 5x^3 - 2)^4$

(b) $y = \sqrt{2x+3}$

(C) $y = (x^2 - 4)^5$

(d) $y = (x^2 - x^{-2})^{1/2}$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

(a) $y=(2x^2+x^3)^4$ (b) $y=\sqrt{3x^2+1}$

(C) $y=(x^3-1)^{-2}$ (d) $y=(x^{-3}+x)^3$ □

تدريب (5)

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

(a) $y=\text{Log}_a\ (2x^3+4)$ (b) $y=\ln(x+3)^2$

(C) $y=\ln\dfrac{x^3}{(2x-4)^3}$ (d) $y=e^{X^3}$

(e) $y=e^{-1/3^x}$ (f) $=\dfrac{1}{e^{0.5^x}}$

أسئلة التقويم الذاتي (4)

أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

(a) $y=e^{5x}$ (b) $y=e^{x^4}$ (C) $y=\ln(2x+1)^3$

□

(d) $y=\ln\dfrac{x^2}{(x+2)^3}$ (e) $y=\dfrac{1}{e^{1/4^x}}$

2 .4. المشتقات من رتب أعلى:

المشتقات من رتب أعلى: هي المشتقات من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة

إذا كانت: $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عدة مرات فيمكننا الحصول على المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية ثم المشتقة الثالثة وهكذا.... على التوالي.

ويرمز للمشتقة الثانية بأحد الرموز:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{or} \quad \frac{d^2}{dx^2}[f(x)] \quad \text{or} \quad y^{//}$$

كما يرمز للمشتقة الثالثة بأحد الرموز:

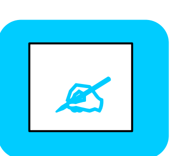
$$\frac{d^3y}{dx^3} \quad \text{or} \quad \frac{d^3}{dx^3}[f(x)] \quad \text{or} \quad y^{///}$$

وهكذا......

ومن تعريف المشتقات من رتب أعلى نستنتج أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \ \ldots.$$

أمثلة:



أوجد المشتقة الثانية للدوال الآتية:

(a) $y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4$

(b) $y = \frac{x}{x-1}$

(C) $y = \frac{x+2}{x-2}$

(d) $y = x^2 (x+2)^2$

الحـل:

$$(a)\ \because\ y = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 4x^3 - 9x^2 + 10x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 - 18x + 10$$

$$(b)\ \because\ y = \frac{x}{x-1}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(1) - x(1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} = -(x-1)^{-2} \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(x-1)^{-3}(1) = 2(x-1)^{-3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$(C)\ \because\ y = \frac{x+2}{x-2}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)(1) - (x+2)(1)}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2} = -4(x-2)^{-2} \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8(x-2)^{-3}(1) = 8(x-2)^{-3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$$(d) \because y = x^2 (x+2)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 (2)(x+2)(1) + (x+2)^2 (2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 4x^2 + (x^2 + 2x + 4)(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^3 + 4x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 8x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 8x^2 + 8x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 12x^2 + 16x + 8$$

□مثال: أوجد المشتقة الثالثة للدوال الآتية:

(a) $y = x^5 - 4x^3 + 7x - 2$ (b) $y = \frac{x}{x+1}$

□**الحل:**

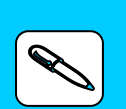
(a) $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 12x^2 + 7$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 20x^3 - 24x$,

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 60x^2 - 24$$

(b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2(x+1)^{-3}$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6(x+1)^{-4} = \frac{6}{(x+1)^4}$$

تدريب (6)



أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل من الدوال الآتية:

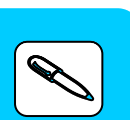
(a) $y = x^3 - 5x^2 + x - 4$

(b) $y = (3x^2 - 4)(x + 3)$

(C) $y = \frac{x + 2}{x - 2}$

(d) $y = \frac{x}{x + 1}$

تدريب (7)



أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية:

(a) $y = x^5 - 4x^3 + 7x - 2$

(b) $y = \frac{x}{x + 1}$

(C) $y = \sqrt{3x + 5}$

أسئلة التقويم الذاتي (5)



أوجد المشتقة الثالثة لكل من الدوال الآتية:

(a) $y = x^3 - 4x^2 + 7x$

(b) $y = \frac{2x}{x + 1}$

(C) $y = \sqrt{4x + 2}$



3. الخلاصة:

تناولت هذه الوحدة التفاضل، حيث اشتملت على تعريف التفاضل وعبرنا عن معدل التغير للدالة رياضياً بالرمز=

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

حيث تمثل Δy التغير في المتغير y و Δx التغير في المتغير x. وبذلك فان معدل التغير هو حاصل قسمة التغير في y على التغير في x.

وعرّفنا التفاضل على أنه نهاية Δx / Δy عندما تؤول Δx إلى صفر.
ونستخدم الرمز dy/dx للإشارة إلى المعامل التفاضلي الأول، أو ما يطلق عليه المشتقة الأولى للدالة بالنسبة للمتغير x .

وتناولنا في هذه الوحدة قواعد التفاضل المختلفة، وضمنا تلك القوا عد أمثلة توضيحية لتساعدك على استيعابها.

كما تعرضنا لتفاضل الدالة اللوغاريتيمية والأسية، وبينا كيفية إيجاد المشتقة الأولى لمثل تلك الدوال، وضمنا ذلك أمثلة توضيحية لتساعدك على استيعاب وفهم أسلوب تفاضل تلك الدوال.

وبينا في هذه الوحدة أيضا مفهوم التفا ضل من رتب أعلى، وضمنا ذلك أمثلة توضيحية لتساعدك على استيعاب وفهم أسلوب تفاضل من رتب أعلى(المشتقة الثانية والثالثة).

4. لمحة مسبقة عن الوحدة الدراسية الحادية عشرة

عزيزي الدارس، بعد دراستك للوحدة العاشرة (التفاضل)، أصبحت قادراً على فهم قواعد التفاضل وإيجاد المشتقة الأولى للدوال الآسية واللوغارتيمية، بالإضافة إلى الاشتقاق من رتب أعلى.

وفي الوحدة الحادية عشرة سنتطرق إلى تطبيقات التفاضل، التي من أهمها النهايات العظمى والصغرى.

ونظراً لأهمية تلك التطبيقات في الحياة العملية، فإن دراستك لهذه الوحدة تمكنك عزيزي الدارس، من الإجابة على كثير من التساؤلات حول النهايات العظمى والصغرى، وكيفية استخدامها في التطبيقات الإدارية للمنشآت الاقتصادية.

وسنتناول في هذه الوحدة تعريف النهايات العظمى والصغرى وأسلوب إيجاد تلك النهايات، كما سنتناول أيضا الدوال التزايدية والتناقصية، وسنوضح متى تكون الدالة تزايدية أو تناقصية، كما سنتطرق في هذه الوحدة لبعض التطبيقات الاقتصادية المختلفة التي تساعدك على استيعاب أسلوب تطبيقات التفاضل في الحياة العملية.

5. إجابات التدريبات:

تدريب1:

(a) $\because y = 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 4$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 0$$

(b) $\because y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

(C) $\because y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times 2\ x^{-1/2} + \frac{1}{3} \times 6\, x^{-2/3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}}$$

(d) $\because y = 1 + x^{-2} + x^3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - 2x^{-3} + 3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3} + 3x^2$$

تدريب2 :

$$(a)\ \because\ y=(x+1)(x^2-1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(x+1)(2x)+(x^2-1)(1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2x^2+2x+x^2-1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2+2x-1$$

$$(b)\ \because\ y=(2x^2-1)(x+1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(2x^2-1)(1)+(x+1)(4x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2x^2-1+4x^2+4x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=6x^2+4x-1$$

$$(C)\ \because\ y=\left(x+\frac{2}{x}\right)(x^2-3)=(x+2x^{-1})(x^2-3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(x+2x^{-1})(2x)+(x^2-3)(1-2x^{-2})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(2x^2+2)+(x^2-2-3+3x^{-2})$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(2x^2+2)+(x^2+3x^{-2}-5)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2+3x^{-2}-3$$

تدريب3:

(a) $\because y = \dfrac{3-2x}{3+2x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(3+2x)(-2)-(3-2x)(2)}{(3+2x)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-6-4x-6+4x}{(3+2x)^2} = \frac{-12}{(3+2x)^2}$$

(b) $\because y = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(2x)-(x^2-1)(1)}{(x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

(C) $\because y = \dfrac{x}{2x+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(2x+1)(1)-(x)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

(d) $\because y = \dfrac{1}{x-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)(0)-(1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$ □

تدريب4 :

(a) $\because y=(x^2+5x^3-2)^4$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4(x^2+5x^3-2)^3(2x+15x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4(2x+15x^2)(x^2+5x^3-2)$$

□

(b) $\because y=\sqrt{2x+3} \rightarrow y=(2x+3)^{1/2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(2x+3)^{-1/2}(2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{(2x+3)^{1/2}}$$

□

(C) $\because y=(x^2-4)^5$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=5(x^2-4)^4(2x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=10x(x^2-4)^4$$

(d) $\because y=(x^2-x^{-2})^{1/2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(x^2-x^{-2})^{-1/2}(2x+2x^{-3})$$ □

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(2x+2x^{-3})}{2\sqrt{(x^2-x^{-2})}}$$

تدريب5 :

(a) $\because y = \text{Log}_a\ (2x^3+4)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(2x^3+4)} \cdot \frac{d}{dx}(2x^3+4)$$

$$= \frac{6x^2}{(2x^3+4)}$$

(b) $\because y = \ln (x+3)^2 = 2\ln (x+3)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x+3} \cdot \frac{d}{dx}(x+3) = \frac{2}{x+3}$$

(C) $\because y = \ln \frac{x^3}{(2x-4)^3} = \ln x^3 - \ln (2x-4)^3$

$$= 3\ln x - 3\ln (2x-4)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x) - 3\frac{1}{(2x-4)} \cdot \frac{d}{dx}(2x-4)$$

$$= \frac{3}{x} - \frac{6}{(2x-4)}$$

(d) $\because y = e^{x^3}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x^3} \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2\, e^{x^3}$$

(e) $\because y = e^{-1/3x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{-1/3x} \cdot \frac{d}{dx}(-\tfrac{1}{3}x) = -\frac{1}{3}e^{-1/3x}$$

(f) $\because = \frac{1}{e^{0.5x}} = e^{-1/2x}$ □

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{-1/2x} \cdot \frac{d}{dx}(-\tfrac{1}{2}x) = -\frac{1}{2}e^{-1/2x}$$

□

تدريب6 :

$$(a) \because y = x^3 - 5x^2 + x - 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 10x + 1 \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 10$$

$$(b) \because y = (3x^2 - 4)(x + 3)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (3x^2 - 4)(1) + (x + 3)(6x)$$

$$= 9x^2 + 18x - 4 \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18x + 18$$

$$(C) \because y = \frac{x + 2}{x - 2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x - 2)(1) - (x + 2)(1)}{(x - 2)^2} = \frac{-4}{(x - 2)^2}$$

$$= -4(x - 2)^{-2} \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8(x - 2)^{-3} = \frac{8}{(x - 2)^3}$$

$$(d) \because y = \frac{x}{x - 1} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(x - 1)(1) - (x)(1)}{(x - 1)^2} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$$

$$= -(x - 1)^{-2} \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2(x-1)^{-3}\times 1=2(x-1)^{-3} \quad ,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=2\times -3(x-1)^{-4}\times 1=-6(x-1)^{-4}$$

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{-6}{(x-1)^4}$$

تدريب 7 :

(a) $\because y=x^5-4x^3+7x-2$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=5x^4-12x^2+7 \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=20x^3-24x \quad ,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=60x^2-24$$

(b) $\because y=\frac{x}{x+1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)(1)-(x)(1)}{(x-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$=(x-1)^{-2} \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2(x+1)^{-3}\times 1=-2(x+1)^{-3} \quad ,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-2\times -3(x-1)^{-4}\times 1=6(x-1)^{-4}$$

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{6}{(x-1)^4}$$

(C) $\because y = \sqrt{3x+5} = (3x+5)^{1/2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x+5)^{-1/2}\,(3)$$

$$= \frac{3}{2}(3x+5)^{-1/2} \qquad ,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\,(3x+5)^{-3/2}\,(3)$$

□

$$\therefore \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{9}{4}(3x+5)^{-3/2}$$

6. المراجع :

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
3. الجاسر، إبراهيم عبدالله. (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، مكتبة فهد الوطنية، الرياض: المملكة العربية السعودية.
4. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
5. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
6. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

7. التعيينات:

السؤال الأول:

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = x^4 + 2x$

(b) $y = x^3$

(C) $y = x + \frac{1}{x^2}$

(d) $y = 3(1+3x)$

(e) $y = \sqrt{2x}$

(f) $y = (2x-6)^2$

(g) $y = \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}$

(h) $y = \frac{x-4}{\sqrt{x}}$

السؤال الثاني:

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = 5\sqrt{x} + 2x^{3/4}$

(b) $y = \frac{2x++1}{x^2-3}$

(C) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-2}$

(d) $y = (x^3+3x)^3$

(e) $y = \sqrt{x} + 3x^2$

(f) $y = (4x-6)^{1/2}$

(g) $y = \frac{1}{x^{-2}} + \frac{2}{x^3}$

(h) $y = \frac{x-4}{x+1}$

السؤال الثالث:

أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية:

(a) $y = \ln(2x^3 + 1)$ (b) $y = (x+2)(x^2+3)$

(C) $y = e^X$ (d) $y = e^{-2X}$

(e) $y = e^{(3X + 2X^2 + 2)}$ (f) $y = \text{Log}(2x^2 - 3x)^{1/2}$

(g) $y = \dfrac{e^X}{2X+3}$ (h) $y = \dfrac{e^{2X}}{\sqrt{3x^2}}$

السؤال الرابع:

أوجد المشتقة الثانية للدوال الآتية:

(a) $y = 2x^3 + 3x^4$ (b) $y = 5x^4 + 2x - 4$

(C) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ (d) $y = e^{2X}$

(e) $y = \dfrac{x^2 + 2}{x}$ (f) $y = (x^2 + 2)(x - 1)$

(g) $y = (x+3)^3$ (h) $y = \sqrt{x+2}$

(i) $y = \ln(2x+4)$ (j) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

الوحدة الحادية عشرة

11

تطبيقات التفاضل

محتويات الوحدة

1. المقدمة:

1.1. تمهيد:

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة (تطبيقات التفاضل) والتي تتألف من أربعة أقسام رئيسة، حيث يزودك القسم الأول بالنهايات العظمى والصغرى وأسلوب حساب هذه النهايات، بالإضافة إلى الشروط التي تكون عندها الدالة نقطة نهاية عظمى أو صغرى.

ويتناول القسم الثاني دراسة التزايد والتناقص للدالة متضمنا أمثلة توضيحية لتتمكن -عزيزي الطالب- من استيعاب المواقف المختلفة التي تكون عندها الدالة في حالة تزايد أو تناقص.

ويُركز القسم الثالث من هذه الوحدة على دراسة تغير الدالة، من حيث التحدب والتقعر ونقط الانقلاب لمنحنى الدالة.

ويتناول القسم الرابع بعض التطبيقات الاقتصادية للتفاضل، حيث تعرضنا للمنشأة في حالة المنافسة الكاملة، وبينا أسلوب بتحديد الوحدات المنتجة من سلعة ما بالإضافة إلى تحديد أعلى عائد تحققه هذه المنشأة. وتساعدك هذه الوحدة على فهم واستيعاب مفهوم النهايات العظمى والصغرى وكيفية استخدامها في التطبيقات الاقتصادية. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل على أمثلة منوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

2.1. أهداف الوحدة :

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية الحادية عشر وهي بعنوان " تطبيقات التفاضل " والذي يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تُعرّف النهايات العظمى.
2. تحسب النهايات العظمى.
3. تعرف النهايات الصغرى.
4. تحسب النهايات الصغرى.
5. تفرق بين النهايات العظمى والصغرى.
6. تشرح تزايد الدالة.
7. تشرح تناقص الدالة.
8. تشرح تحدب منحنى الدالة.
9. تعرف نقط الانقلاب.
10. تشرح أسلوب التطبيقات الاقتصادية للتفاضل.



3.1. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من أربعة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق أهداف هذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الأول بالهدف الأول حتى الهدف الخامس، والذي يركز على النهايات العظمى والصغرى والشرط اللازم والكافي لكي تكون للدالة نهاية عظمى أو صغرى.

وفي القسم الثاني تناولنا تعريف تزايد وتناقص الدالة والحالات المختلفة التي تكون عندها الدالة في حالة تزايد أو تناقص، وهذا يحقق الهدف السادس والسابع.

أما في القسم الثالث فقد تم التركيز على دراسة تغير الدالة وأسلوب دراسة هذا التغير، من حيث التحدب ونقط الانقلاب. وبهذا تحقق الهدف الثامن والتاسع.

وتم في القسم الرابع تناول التطبيقات الاقتصادية للتفاضل، وبينا كيفية استخدام المشتقة الأولى والثانية للدالة لتحديد عدد الوحدات التي يجب أن تنتجها المنشأة بالإضافة إلى حساب أعلى ربح بفرض أن تلك المنشأة قد قامت بتسويق كل الوحدات المنتجة.

4.1 . القراءات المساعدة:

تمثل المراجع الآتية قراءات إضافية مساعدة تتعلق بالموضوعات المتضمنة في هذه الوحدة، آمل -عزيزي الدارس- أن تساعدك في المزيد من التعمق في مفردات المادة العلمية نظراً لارتباطها الوثيق بهذه الوحدة.

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
3. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
4. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
5. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.



5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة وأسئلة التقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاءً من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلى التأكد من تهيئتك المكان الملائم للدراسة وأن يكون لديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. تطبيقات التفاضل (النهايات العظمى والصغرى للدوال):

1.2. مقدمة:

يعد تحديد النهايات العظمى والصغرى لكثير من الدوال واحدا من أهم التطبيقات العلمية لنظرية التفاضل، التي تم شرح أجزاء مهمة منها في الوحدة السابقة. فمن المعلوم وجود بعض الدوال التي تزيد أو تنقص قيم متغيراتها التابعة باستمرار، مع تزايد قيم متغيراتها المستقلة. وفي مثل هذه الحالات لا يمكن تحديد أية نهاية عظمى أو صغرى لمثل هذه الدوال. وبالمثل توجد كثير من الدوال أو العلاقات الرياضية الأخرى، التي تشرح كثيراً من مظاهر الحياة العملية أو التجارية، والتي يتغير فيها اتجاه قيم المتغير التابع من الزيادة إلى النقص أو العكس مع زيادة قيم المتغير المستقل، ومثل هذه الأنواع من الدوال يمكن أن يكون لها نهايات عظمى أو صغرى.

مثلا الدوال التي تصف علاقة الإرباح المتحصل عليها من بيع السلع، مع أسعار بيع هذه السلع، يمكن أن يتحدد لها في كثير من الأحيان نهايات عظمى. كذلك دوال الإيراد لها نهايات عظمى. وبالمثل الدوال التي تصف التغيرات التي تطرأ على التكاليف المتوسطة أو التكاليف الحدية مع زيادة كمية الإنتاج، لها نهايات صغرى، ....، الخ.

ويلاحظ أنه يمكن تحديد قيم هذه النهايات العظمى والصغرى عن طريق حساب معاملات التفاضل الأولى والثانية لهذه الدوال. وبمعنى أخر، يمكن تحديد سلوك أية دالة عن طريق حساب المعاملين التفاضليين الأول والثاني لهذه الدوال.

النهايات العظمى:
هي النقط التي عندها تتحول الدالة من تزايد إلى تناقص، أي يتحول ميل المماس من موجب إلى سالب، بمعنى أن قيمة $\frac{dy}{dx} = 0$، ويكون المماس موازياً لمحور السينات. وفي حالة النهاية العظمى يكون المنحنى مقعراً إلى أسفل.

2.2. النهايات العظمى:

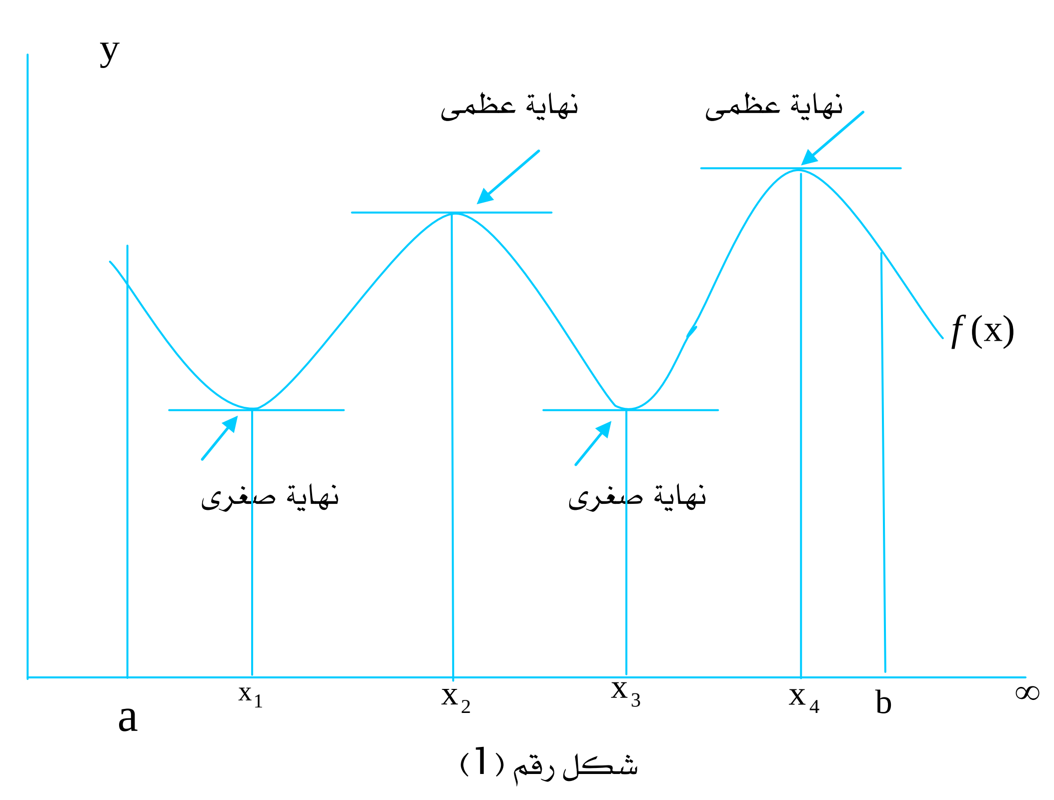
يقال أن للدالة $y = f(x)$ نهاية عظمى عند النقطة $x = x_2$ إذا كانت قيمة الدالة عند النقطة x_2 أكبر من قيمتها عند كل نقطة في مجال معين يضم النقطة x_2.

3.2. النهايات الصغرى:

يقال أن للدالة $y = f(x)$ نهاية صغرى عند النقطة $x = x_1$ إذا كانت قيمة الدالة عند النقطة x_1 أكبر من قيمتها عند كل نقطة في مجال معين يضم النقطة x_1.

ولكن لا بد من مراعاة أن النهاية العظمى أو الصغرى للدالة لا تعني أكبر قيمة أو أصغر قيمة للدالة في مجال ما. فالنهاية العظمى للدالة هي أكبر قيمة للدالة عند النقاط المجاورة لنقطة النهاية العظمى أي أنها قيمة عظمى نسبياً، والشيء نفسه يقال عن النهاية الصغرى فهي نهاية صغرى نسبياً ويتضح هذا من الشكل رقم (1).

النهايات الصغرى:
هي النقط التي عندها تتحول الدالة من تناقص إلى تزايد، أي يتحول ميل المماس من سالب إلى موجب، بمعنى أن قيمة $\frac{dy}{dx} = 0$ ، ويكون المماس موازياً لمحور السينات.
وفي حالة النهاية الصغرى يكون المنحنى مقعراً إلى أعلى.



شكل رقم (1)

النهايات العظمى والصغرى لدالة ذات المتغيرين

4.2. شروط النهايات العظمى والصغرى للدالة.

1.4.2. الشرط اللازم:

إذا كانت قيمة الدالة ما $f(x)$ عند النقطة $x = x_1$ نهاية عظمى أو نهاية صغرى، فإن معامل التفاضل الأول للدالة عند هذه النقطة يساوي صفراً أي أن:

$$\frac{dy}{dx}(x_1) = 0$$

□

2.4.2. الشرط الكافي:

إذا كان معامل التفاضل الثاني للدالة $f(x)$ هو:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \square$$

فإن الدالة تكون عند النهاية العظمى عند النقطة $x = x_1$ إذا كان معامل التفاضل الثاني أقل من صفر.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_1) < 0$$

وتكون الدالة عند النهاية الصغرى إذا كان معامل التفاضل الثاني أكبر من صفر.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x_1) > 0$$

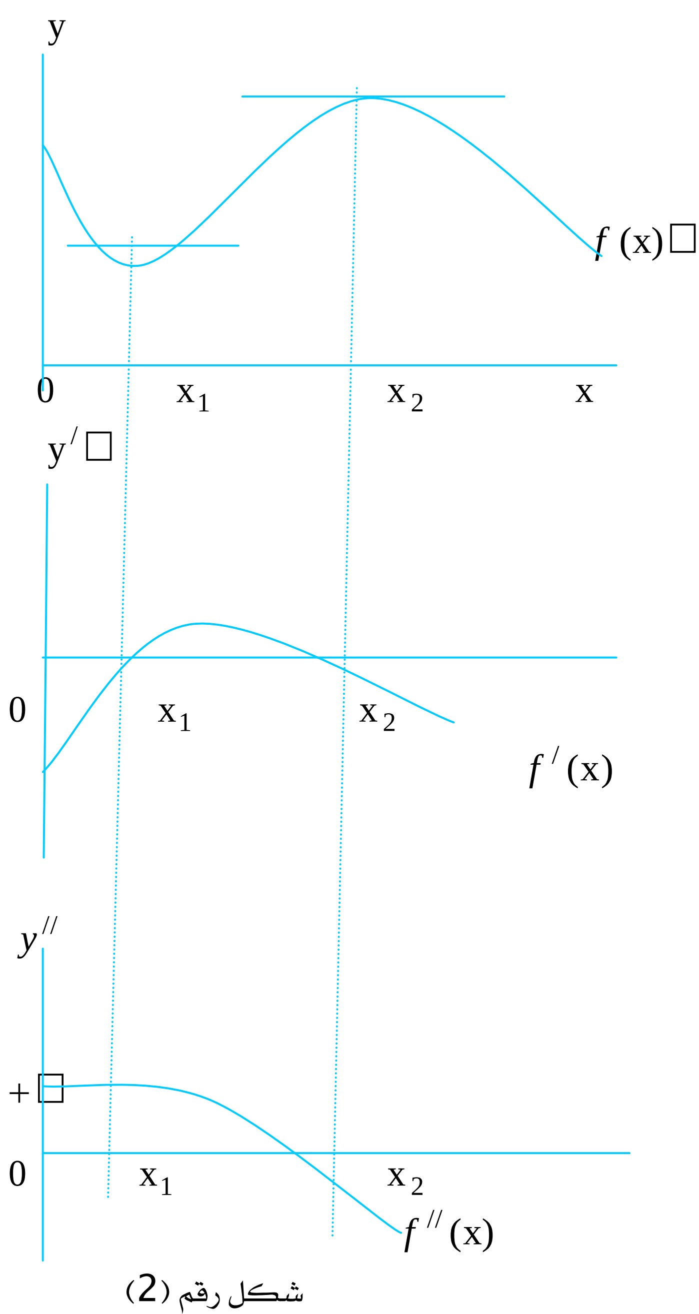
ويمكن توضيح شروط النهايات العظمى والصغرى باستخدام الشكل البياني رقم (2). فعند النقطتين x_2 , x_1 يكون المماس للدالة $f(x)$ موازياً للمحور الأفقي، أي يكون ميل هذا المماس (الذي يعبر عن معامل التفاضل الأول) مساوياً صفراً. ويكون ميل الدالة موجباً عند النقط على يمين x_1 والعكس بالنسبة للنقط على يسار x_1.

ويوضح الجزء الثاني من الشكل البياني أن عند كل من x_2 , x_1 يكون المعامل التفاضلي الأول:

$$f'(x) = 0$$

وهو ما يعبر عن الشرط اللازم للنقاط العظمى والصغرى.

أما الجزء الأخير من الشكل البياني فيوضح أن معامل التفاضل الثاني $f^{//}(x)$ يكون موجباً عند النقطة x_1 وسالباً عند النقطة x_2 ، وهو ما يُعبر عن الشرط الثاني أو الشرط الكافي للنهايات العظمى والصغرى.



شكل رقم (2)

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يأتي :

إذا كان لدينا دالة في متغيرين y , x بحيث:

$$y = f\ (x)$$

فإن هذه الدالة تكون عند النهاية العظمى إذا ما توافر الشرطان الآتيان:

(1) $\frac{dy}{dx} = 0$ وهو الشرط اللازم.

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ وهو الشرط الكافي.

وتكون الدالة $y = f\ (x)$ عند النهاية الصغرى إذا ما توافر الشرطان الآتيان:

(1) $\frac{dy}{dx} = 0$ وهو الشرط اللازم.

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ وهو الشرط الكافي.

ولاختبار ما إذا كانت دالة ما عند نهاية عظمى أو صغرى نتبع الخطوات الآتية:

(1) نقوم أولا بإيجاد معامل التفاضل الأول $\frac{dy}{dx}$ للدالة $f\ (x)$

(2) نقوم بإيجاد قيمة x التي تحقق صحة المعادلة:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

(3) نقوم بإيجاد معامل التفاضل الثاني $\frac{d^2y}{dx^2}$ للدالة $f\ (x)$

(4) نقوم بالتعويض عن قيم x التي حصلنا عليها في الخطوة (2) في معادلة معامل التفاضل الثاني. فإذا كانت نتيجة التعويض هي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

□يكون للدالة نهاية عظمى عند هذه القيمة.

أما إذا كانت نتيجة التعويض في معامل التفاضل الثاني هي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

يكون للدالة نهاية صغرى عند هذه القيمة.

أما إذا كانت نتيجة التعويض هي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

فإنه لا يمكن الجزم إن كان هناك نهاية عظمى أو صغرى.

(5) نعوض قيمة x التي تعطي النهاية العظمى أو الصغرى في الدالة $f(x)$ لنحصل على القيمة العظمى أو الصغرى.

مثال (1):

اختبر ما إذا كان للدالة الآتية نهاية عظمى أو صغرى، ثم احسب نقط القيم العظمى أو الصغرى (إن وجدت).

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

الحل:

(1) نقوم بحساب معامل التفاضل الأول للدالة:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 3$$

(2) لكي يكون للدالة نهاية عظمى أو صغرى لا بد وأن $\frac{dy}{dx} = 0$ كشرط لازم.

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$$

وهذه المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد، يمكن حلها باستخدام التحليل:

$$(x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad ,$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

ويكون حل المعادلة: $\{ x=1 \;,\; x=3 \}$

(3) نحسب معامل التفاضل الثاني:

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 4$$

(4) نعوض عن قيم $x = (1 \;,\; 3)$ - التي حصلنا عليها في الفقرة رقم (2) – في الفقرة رقم (3):

❖ عندما: $x=1$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(1) - 4 = -2 \qquad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} < 0 \; \square$$

❖ عندما $x=3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2(3) - 4 = 2 \qquad \therefore \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

تحليل نتائج التعويض:

❖ **المعامل التفاضلي الثاني:**

(1)

عندما: $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$. $x=1$ وبالتالي فإن للدالة نهاية عظمى.

(2)

عندما: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$. $x=3$ وبالتالي فإن للدالة نهاية صغرى.

❖ ولحساب نقط النهايات العظمى والصغرى:

يتم التعويض بقيم $\{x = 1 \;,\; 3\}$ في الدالة الأصلية.

$$\because y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 \quad , \quad \square$$

$x=1$

$$\therefore y_{Max} = \frac{(1)}{3} - 2(1) + 3(1) + 1 = \frac{7}{3} \square$$

❖إذن نقطة النهاية العظمى هي: $\left\{ x=1 \,,\; y = \frac{7}{3} \right\}$

$$\because y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 \quad ,$$

$x=3$

$$y_{Min} = \frac{(3)^3}{3} - 2(3)^2 + 3(3) + 1 = 1$$

❖ إذن نقطة النهاية العظمى هي: $\{ x=3 \;,\; y = 1 \}$

مثال:2

أوجد نقط القيم العظمى والصغرى للدالة:

$$f(x)=x^2-6x+11$$

الحـل:

$$\because f(x)=x^2-6x+11$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=2x-6 \Rightarrow 2(x-3) \quad ,$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=2 \Rightarrow 2>0$$

$$\therefore \frac{dx}{dy}=0 \quad \Rightarrow x=3$$ عندما

$$\because \frac{d^2y}{dy^2}(3)=2>0$$

إذن للدالة نقطة نهاية صغرى عندما: $x=3$

ولإيجـاد نقطـة النهايـة الصـغرى للدالـة نعـوض عـن قيمـة: $x=3$ في الدالـة الأصلية:

$$\because f(x)=x^2-6x+11 \quad ,$$

$$x=3$$

$$y_{min}=(3)^2-6(3)+11=2$$

❖ إذن نقطة النهاية الصغرى هي: $\{x=3\ ,\ y=2\}$

مثال:3

أوجد نقط القيم العظمى والصغرى للدالة:

$$f(x)=3x^5+2x^3-1$$

الحـل:

$$\because f(x)=3x^5+2x^3-1$$

$$\frac{dx}{dy}=15x^4+6x^2=3x^2(5x^2+2)>0 \quad ,$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=60x^3+12x$$

$\because \frac{dx}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ عندما

$\because \frac{d^2y}{dy^2}(0) = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

إذن لا يصلح هذا الاختبار ونبحث إشارة: $\frac{dy}{dx}$ على يسار ويمين $x = 0$

❖ عندما: $x < 0$:

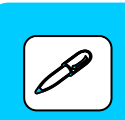
☐ $\frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow$ كمية موجبة $= \frac{dy}{dx}$

❖ عندما: $x > 0$:

$\frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow$ كمية موجبة $= \frac{dy}{dx}$

إذن عندما: $x = 0$ ليست نقطة للدالة عندها قيمة عظمى أو صغرى.

تدريب (1)



أوجد نقط القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال الآتية:

(a) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 10$

(b) $f(x) = x(x-3)^2 + 2$

أسئلة التقويم الذاتي (1)



أوجد نقط القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال الآتية:

(a) $f(x) = x^2 - x - 12$

(b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$

(C) $f(x) = x^4(x+2)^2$

(d) $f(x) = (2x-3)^2$

3. تزايد وتناقص الدالة:

تعرضنا للقيم العظمى والصغرى للدالة في القسم الثاني، وعرفنا القيمة العظمى للدالة في فترة ما على أنها أكبر قيمة تأخذها الدالة في هذه الفترة، وعرفنا القيمة الصغرى على أنها أصغر قيمة تأخذها الدالة في هذه الفترة، فإذا كانت الدالة متزايدة تكون القيمة الصغرى لها في بداية الفترة والقيمة العظمى لها في نهاية الفترة، أما إذا كانت الدالة متناقصة فتكون القيمة العظمى لها في بداية الفترة والقيمة الصغرى لها في نهاية الفترة.

تعريف:

إذا كانت: $\frac{dy}{dx}$ هي المشتقة التفاضلية الأولى للدالة $f(x)$ ، فإنه في الفترة:

$$a \le x \le b$$

فإذا كانت المشتقة الأولى: $\frac{dy}{dx} > 0$ لجميع قيم x في الفترة المعطاة، فإن الدالة $f(x)$ تكون متزايدة في هذه الفترة.

وإذا كانت: $\frac{dy}{dx} < 0$ لجميع قيم x في الفترة المعطاة، فإن الدالة $f(x)$ تكون متناقصة في هذه الفترة.



مثال4:

ابحث تزايد وتناقص الدوال الآتية:

(a) $f(x) = x^2 + 2$ (b) $f(x) = 4 - x^2$

الحل:

(a) $\because f(x) = x^2 + 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2x$

❖ وفي الفترة: $0 < x$ تكون المشتقة التفاضلية موجبة، وعليه فإن الدالة تكون متزايدة في هذه الفترة.

❖ وفي الفترة: $x < 0$ تكون المشتقة التفاضلية سالبة، وعليه فإن الدالة تكون متناقصة في هذه الفترة.

$$(b) \because f(x) = 4 - x^2 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = -2x$$

❖ وفي الفترة: $x > 0$ تكون المشتقة التفاضلية سالبة، وعليه فإن الدالة تكون متناقصة في هذه الفترة.

❖ وفي الفترة: $x < 0$ تكون المشتقة التفاضلية موجبة، وعليه فإن الدالة تكون متزايدة في هذه الفترة.



مثال5:

أوجد فترات تزايد وتناقص الدالة:

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$$

الحـل:

$$\because f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4x^3 + 24x^2 + 36x \Rightarrow 4x\,(x^2 + 6x + 9)$$

وبالآتي فان:

$$\frac{dy}{dx} = 4x\,(x+3)^2$$

ويلاحظ أن المقدار: $(x+3)^2$ دائما موجب، وعلى ذلك فإن إشارة المشتقة التفاضلية تتوقف على إشارة x ، حيث تكون المشتقة التفاضلية:

❖ موجبة إذا كانت $x > 0$ ، وعليه تكون الدالة متزايدة في هذه الفترة.

❖ سالبه إذا كانت $x < 0$ ، وعليه تكون الدالة متناقصة في هذه الفترة.

أي أن الدالة:

$f(x)$ متزايدة إذا كانت: $x > 0$

$f(x)$ متناقصة إذا كانت: $x < 0$

مثال6:

حدد فترات تزايد وتناقص الدالة، وكذلك القيم العظمى والصغرى للدالة:

$$f(x)\ 3x^4-4x^3-12x^2+17$$

الحـل:

$$\frac{dy}{dx}=12x^3-12x^2-24$$
$$=12x\ (x^2-x-2)$$
$$=12x\ (x-2)(x+1)$$

وبوضع:
$$\frac{dy}{dx}=0$$
$$\therefore 12x(x-2)\ (x+1)=0$$

ويكون حل المعادلة:

$$x=0\ ,\ (x-2)=0\ \Rightarrow x=2\ ,\ (x+1)=0 \Rightarrow x=-1$$

وتكون النقط الحرجة عند:

$$x=0\quad ,\quad x=2\quad ,\quad x=-1$$

وعلى ذلك ندرس إشارات $\frac{dy}{dx}$ في الفترات:

$$x<-1\ ,\ -1<x<0\ ,\ 0<x<2\ ,\ x>2$$

ويمكن تتبع إشارة $\frac{dy}{dx}$ من خلال الجدول التالي:

الفترة	x	$x+1$	$x-2$	إشارة $\frac{dy}{dx}$	طبيعة الدالة
$x<-1$	-	-	-	-	متناقصة
$-1<x<0$	-	+	-	+	متزايدة
$0<x<2$	+	+	-	-	متناقصة
$x>2$	+	+	+	+	متزايدة

ويلاحظ من الجدول أنه:

عند: $x=-1$

❖ تكون للدالة نقطة نهاية صغرى هي: $f(-1) = 12$

وذلك لأن الدالة كانت متناقصة قبل هذه النقطة ومتزايدة بعدها ، لأن إشارة المشتقة التفاضلية قبلها كانت سالبة وبعدها كانت موجبة.

❖ عند: $x = 0$

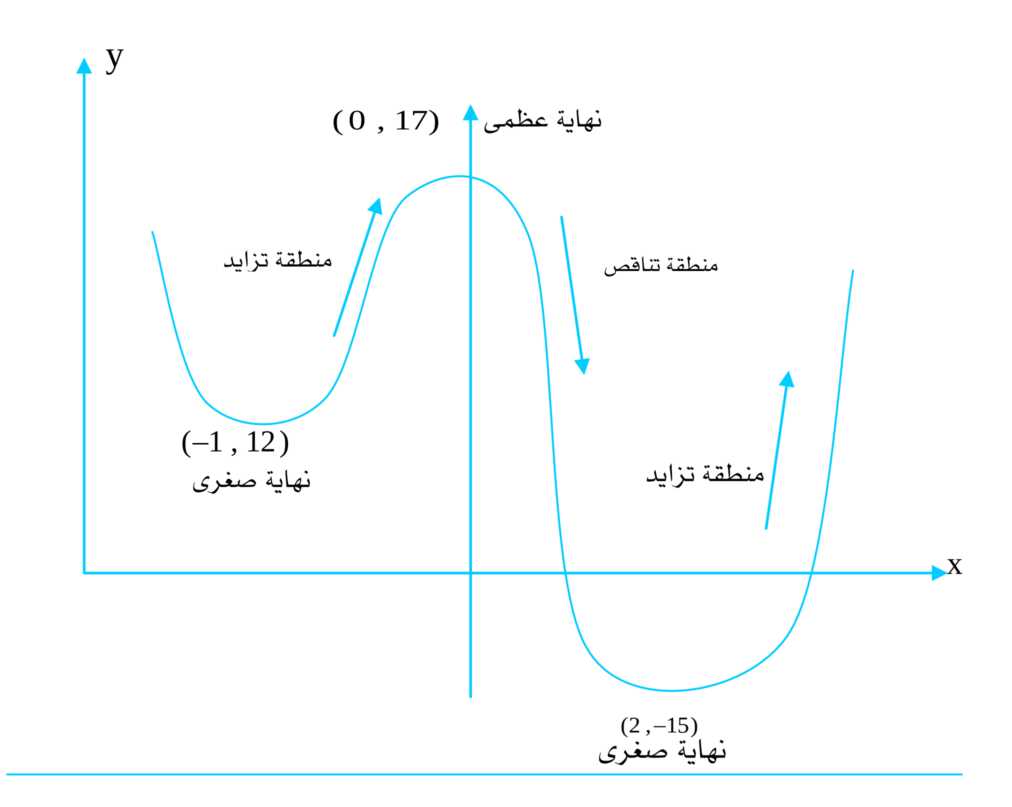
❖ تكون للدالة نقطة قيمة عظمى هي: $f(0) = 17$

وذلك لأن الدالة كانت متزايدة قبل هذه النقطة ومتناقصة بعدها ، لأن إشارة المشتقة التفاضلية قبلها كانت موجبة وبعدها كانت سالبة.

❖ عند: $x = 2$

❖ تكون للدالة نقطة قيمة صغرى هي: $f(2) = -15$

وذلك لأن الدالة كانت متناقصة قبل هذه النقطة ومتزايدة بعدها ، لأن إشارة المشتقة التفاضلية قبلها كانت سالبة وبعدها كانت موجبة. والشكل العام للدالة كما في الشكل الآتي:



شكل رقم (3)

مثال 7:

ابحث عن فترات التزايد والتناقص للدالة:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$$

الحـل:

$$\because\ f(x) = x^2 - 3x^2 - 9x + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9 \Rightarrow 3(x^2 - 2x - 3)$$

$$\Rightarrow 3(x-3)(x+1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

وذلك عندما: $x = -1\ ,\ 3$

يلاحظ أن مجال الدالة هو عبارة عن الأعداد الحقيقية: $\{-1\ ,\ 3\}$. وبناءً عليه نقسم هذا المجال إلى ثلاث فترات كما يأتي :

1- الفترة: $]-\infty\ ,\ -1[$

$\because\ -2$ تنتمي إلى هذه الفترة ، $\frac{dy}{dx}(-2) = 3(4+4-3) = 15 > 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} > 0$$

$\therefore$ الدالة تزايدية في هذه الفترة.

2- الفترة: $]-1\ ,\ 3[$

$\because\ 0$ ينتمي إلى هذه الفترة ، $\frac{dy}{dx}(0) = -9 < 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} < 0$$

∴ الدالة تناقصية في هذه الفترة.

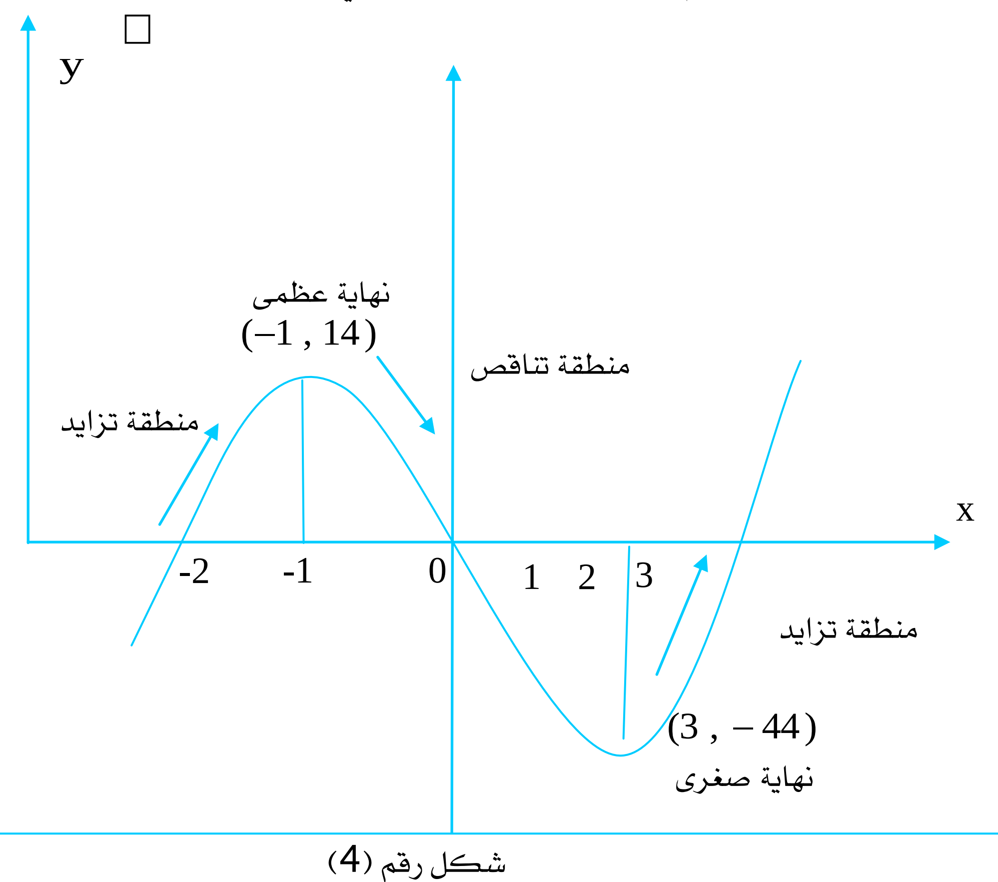
3– الفترة: $]3 , \infty[$

∵ 4 تنتمي إلى هذه الفترة ، $\frac{dy}{dx}(4) = 3(16-8-3) = 15 > 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} > 0$$

∴ الدالة تزايدية في هذه الفترة.

والشكل العام للدالة كما في الشكل التالي:



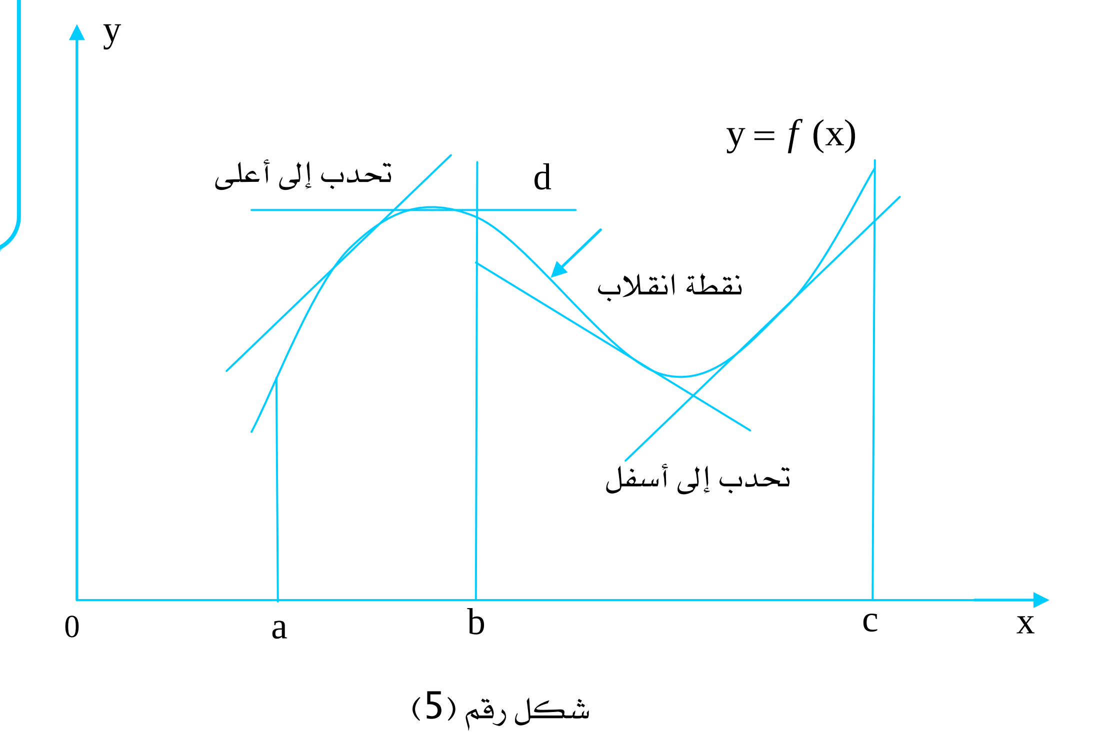
شكل رقم (4)

4. تحدّب منحنى الدالة ونقط الانقلاب:

يقال أن منحنى الدالة مُحدّب إلى أعلى في المجال [a , b]، إذا وقعت كل نقطة على هذا المنحنى أسفل أي مماس له خلال هذا المجال.

ويقال أن المنحنى مُحدّب إلى أسفل في المجال [a , b]، إذا وقعت كل نقطة على هذا المنحنى أعلى أي مماس له خلال هذا المجال.
والنقط التي تفصل بين مناطق التحدب إلى أعلى ومناطق التحدب إلى أسفل من منحنى الدالة تسمى نقط الانقلاب.ويوضح هذا الشكل البياني التالي:

تعريف:
- إذا كانت المشتقة الثانية $f^{//}(x) < 0$ للدالة $f(x)$ في منطقة ما فإن منحنى الدالة يكون محدبًا إلى أعلى في هذه المنطقة.
- إذا كانت المشتقة الثانية $f^{//}(x) > 0$ للدالة $f(x)$ في منطقة ما فإن منحنى الدالة يكون محدبًا إلى أسفل في هذه المنطقة.



شكل رقم (5)

يوضح الشكل رقم (5) أن الدالة $y = f(x)$ تكون محدبة إلى أعلى في المجال [a , b] بينما تكون الدالة محدبة إلى أسفل في المجال [b , c].



مثال8:

أوجد مناطق التحدب إلى أعلى ومناطق التحدب إلى أسفل لمنحنى الدالة:



$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$$

الحـل:

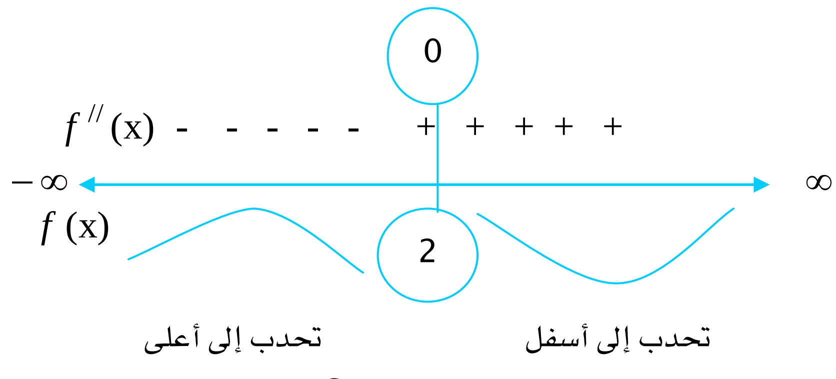
$$\because\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = x^2 - 4x + 1$$

$$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 4 \ \Rightarrow\ 2(x-2) \qquad ,$$

❖ بما أن $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ عندما: $x < 2$ ، $\therefore$ منحنى الدالة يكون محدباً إلى أعلى في المنطقة $]-\infty, 2[$.

❖ وبما أن $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ عندما: $x > 2$ ، $\therefore$ منحنى الدالة يكون محدباً إلى أسفل في المنطقة $]2, \infty[$.



شكل (6)

1.4. تعيين نقط الانقلاب:

حيث أن نقط الانقلاب تفصل بين مناطق التحدب إلى أعلى حيث $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

ومناطق التحدب إلى أسفل حيث $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

❖إذن عند نقط الانقلاب يجب أن تكون $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ، أي يجب أن تكون المشتقة الثانية للدالة =صفراً.

خطوات بحث نقط الانقلاب لدالة ما (قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثانية):

1- نوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ ثم نحل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

2- نبحث إشارة $\frac{d^2y}{dx^2}$ قبل وبعد (مباشرة) كل نقطة من النقط التي حصلنا عليها من (1) وهنا يحدث أحد أمرين:

أ- $\frac{d^2y}{dx^2}$ تتغير إشارتها قبل وبعد النقطة ، فتكون النقطة نقطة انقلاب.

ب- $\frac{d^2y}{dx^2}$ لا تتغير إشارتها قبل وبعد النقطة ، فلا تكون النقطة نقطة انقلاب.

فمثـــلاً:

بالرجوع إلى الدالة في المثال السابق نجد أنه:

❖عندما: $x = 2$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

❖عندما: $x < 2$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

❖عندما: $x > 0$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

أي أن: $\frac{d^2y}{dx^2}$ تغيرت إشارتها من سالب قبل $x = 2$ إلى موجب بعد $x = 2$.

❖ إذن عندما $x = 2$ توجد نقطة انقلاب.

تدريب (2)

السؤال الأول:

ابحث فترات التزايد وفترات التناقص لكل من الدوال الآتية:

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

(b) $f(x) = 2x^2 - 9x^2 - 24x + 20$

السؤال الثاني:

أوجد مناطق التحدب إلى أعلى ومناطق التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لكل من الدوال الآتية.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2$

(b) $f(x) = x^2 - 2$

أسئلة التقويم الذاتي (2)

السؤال الأول:

ابحث فترات التزايد وفترات التناقص لكل من الدوال الآتية:

(a) $f(x) = x^2 - 4x^3 + 3$

(b) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

(C) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

السؤال الثاني:

أوجد مناطق التحدب إلى أعلى ومناطق التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) لكل من الدوال الآتية:

(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$

(b) $f(x) = 2x - 3x^2 - 12x + 1$

(d) $f(x) = (2x - 3)^2$

5. تطبيقات اقتصادية للتفاضل:

1.5. حالة المنافسة الكاملة:

تتميز حالة المنافسة الكاملة بوجود عدد كبير من البائعين والمشترين الذين يتعاملون في سلعة متجانسة ويحاول كل مشترى أن يحقق أقصى إشباع ممكن بينما ، يحاول كل بائع أن يحقق أقصى ربح ممكن. كما أن كل مشتر على علم تام بأذواقه وبأسعار المنتجات وبمقدرتها على تلبية حاجته. وكل بائع على علم تام بكمية الإنتاج التي يمكن إنتاجها من تجمع خدمات عناصر الإنتاج، وعلى علم تام بأسعار هذه الخدمات.

وتتميز المنافسة الكاملة بأن المنتج لا يمكنه أن يتحكم في السعر. فالسعر معطى له، وعليه فإن المنشأة تأخذ السعر كما هو.

ويكون هدف المنشأة تحقيق أقصى ربح ممكن، أي تعظيم الفرق بين الإيراد الكلي والتكلفة الكلية ، بمعنى أن:

$$R = TR - C$$

حيث:

R : الربح الكلي.

TR : الإيراد الكلي.

C : التكلفة الكلية.

والإيراد الكلي TR هو عبارة عن:

$$TR = p \times q$$

حيث:

p : سعر الوحدة المباعة.

q : عدد الوحدات المباعة.

وبالآتي فإن الربح الكلي:

$$R = p \times q - C \square$$

ويتحقق تعظيم الربح الكلي R عندما تكون:

$$\frac{dR}{dq} = 0 \quad , \quad \square$$

$$\frac{d^2R}{dq^2} < 0$$

2.5. معدل تغير الطلب بالنسبة للسعر:

بفرض أن سعر سلعة ما p ودالة الطلب هي $y = f(p)$ دالة في السعر، بمعنى أن الطلب على هذه السلعة يعتمد على سعرها، فإن معدل تغير الطلبة بالنسبة إلى السعر هو عبارة عن المشتقة الأولى لهذه الدالة:

$\frac{dy}{dp}$ وهناك حالتان:

☐ الأولى: إذا كانت:

$\frac{dy}{dp} < 0$ أي أن معدل تغير الطلب بالنسبة إلى السعر سالباً. وهذا يعنى أن الزيادة في سعر السلعة يؤدى إلى أن الكمية المطلوبة منها تقل. ويقال أن هذه السلعة جيدة.

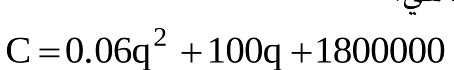
الثانية: إذا كانت:

$\frac{dy}{dp} > 0$ أي أن معدل تغير الطلب بالنسبة إلى السعر موجباً. وهذا يعنى أن الزيادة في سعر السلعة يؤدى إلى أن الكمية المطلوبة منها تزيد. ويقال أن هذه السلعة رديئة.



مثال9:

تقوم الشركة العربية لتصنيع الأجهزة الكهربائية بتسويق أجهزة كهربائية من نفس النوع بسعر 1880 ريالاً للجهاز الواحد، فإذا كانت التكاليف الكلية التي تتحملها الشركة في عدد q من الأجهزة هي:



$$C = 0.06q^2 + 100q + 1800000$$

المطلوب:

ما هو عدد الأجهزة الذي يجب على الشركة بيعها حتى يكون عائد الربح أكبر ما يمكن؟

الحـل:

نعلم أن العلاقة بين الربح R ، والتكاليف C والإيراد الكلي TR هي:

$$R = TR - C \qquad (1)$$

وحيث أن الإيراد الكلي TR =

$$TR = p \times q$$

حيث: q : عدد الوحدات، p سعر الوحدة الواحدة من الأجهزة.

فإذا فرضنا أن عدد الأجهزة المباعة هو q ، فإن الإيراد الكلي=

$$TR = 1880q \qquad (2)$$

وبالتعويض عن الإيراد الكلي TR من العلاقة (2) والتكاليف C من معطيات السؤال.

$$\therefore R = 1880q - (0.06q^2 + 80q + 1800000)$$

$$R = 1880q - 0.06q^2 - 80q - 1800000$$

$$\therefore R = -0.06q^2 + 1800q - 1800000 \qquad (3)$$

$$\frac{dR}{dq} = -0.12q + 1800 \quad ,$$

$$\frac{d^2R}{dq^2} = -0.12$$

ويكون الربح أصغر ما يمكن أو أكبر ما يمكن عندما:

$$\frac{dR}{dq} = 0$$

$$\therefore -0.12q + 1800 = 0 \Rightarrow -0.12q = -1800$$

$$\therefore q = \frac{-1800}{-0.12} = 15000 \quad \text{جهاز}$$

وحيث إن: $\frac{d^2R}{dq^2} < 0$ كمية سالبة ، فإن هذه نقطة نهاية عظمى.

$\therefore$ عندمـــا تنتج الشركـــة: $q = 15000$ جهاز فإن الربح يكـون أكـبر ما يمكن، وعليه فإن الشركة يجب أن تبيع 15000 جهاز لكي تحقق أكبر ربح ممكن.

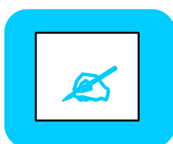
ولمعرفة مقدار أكبر ربح، يتم التعويض عن q في المعادلة (3) ينتج ما يأتي :

$$\therefore R = -0.06q^2 + 1800q - 1800000$$ □

نعوض عن q= 1500:

$$\therefore R = -0.06\ (15000)^2 + 1800\,(15000) - 1800000$$

الربح الكلي $\therefore R = 11700000$ ريال



مثال 10:

شركة العامرية تقوم بتسويق أجهزة الحاسوب، وكان سعر بيع الجهاز الواحد يتوقف على عدد الأجهزة التي يطلبها العملاء من الشركة وذلك على أساس العلاقة الرياضية الآتية:

$$p = 1040 - 0.03q \qquad (1)$$

حيث: p : سعر الجهاز الواحد، q تشير إلى عدد الأجهزة.

المطلوب:

ما هو عدد الأجهزة التي يتم بموجبه تسويقها و تحقق الشركة أكبر ربح ممكن، علماً بأن التكاليف تعطى من العلاقة:

$$C = 0.05q^2 + 140q + 70000 \qquad (2)$$

الحل:

بفرض أن: الإيراد الكلي TR من تسويق عدد q من أجهزة الحاسوب.

$$\therefore TR = p \times q \qquad (3)$$

وبالتعويض عن p من العلاقة (1) في العلاقة (3) نحصل على ما يأتي :

$$TR = q\ (1040 - 0.03q) = 1040q - 0.03q^2$$

$$TR = -0.03q^2 + 1040q$$

وعليه فإن الربح يعطى بالعلاقة الآتية:

$$R = TR - CR = (-0.03q^2 + 1040q) - (0.05q^2 + 140q + 70000)$$

$$R = -0.03q^2 + 1040 - 0.05q^2 - 140q - 70000$$

$$\therefore R = -0.08q^2 + 900q - 70000$$

ولحساب أكبر أو أصغر قيمة للربح نحصل أولاً على المشتقة الأولى:

$$\frac{dR}{dq} = -0.16q + 900 = -0.16q + 900 \qquad (4) \quad ,$$

$$\frac{d^2R}{dq^2} = -0.16$$

ويكون الربح أكبر (أو أصغر) ما يمكن عندما:

$$\frac{dR}{dq} = 0$$

∴ من العلاقة (4):

$$-0.16q + 900 = 0 \Rightarrow -0.16q = -900$$

$$\therefore q = \frac{-900}{0.16} = 5625 \text{ جهاز}$$

وعليه فإن الربح يكون أكبر ما يمكن عندما يكون عدد الأجهزة المباعة 5625 جهازاً.

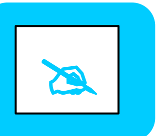
ولمعرفة اكبر ربح تحققه الشركة يتم التعويض في العلاقة:

$$R = -0.08q^2 + 900q - 70000$$

$$R = -0.08(5625)^2 + 900(5625) - 70000$$

$$\therefore R = 2461250 \text{ ريال} \square$$

مثال11:



إذا كانت دالة الطلب على إحدى السلع هي:

$$y = f(p) = 2500 - 6p$$

المطلوب:

اوجد معدل تغير الطلب بالنسبة إلى السعر.

الحـل:

معدل تغير الطلب بالنسبة للسعر يعطى من خلال العلاقة: $\frac{dy}{dp}$

$$\therefore \frac{dy}{dp} = -6$$

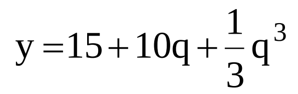
يلاحظ أن معدل الطلب سالب، وبالآتي فإن السلعة جيدة.

3.5. معدل تغير التكاليف بالنسبة للإنتاج:

وهـي تمثـل مقـدار الزيـادة اللحظيـة في التكـاليف بالنسـبة للزيـادة اللحظيـة في الإنتاج. فإذا رمزنا للإنتاج بالرمز q وإلى دالة التكاليف بالرمز y ، فيكـون معدل تغير التكاليف بالنسبة إلى الإنتاج هو: $\frac{dy}{dq}$.

مثال12:

إذا كانت دالة التكاليف تعطى بالعلاقة الآتية:



$$y = 15 + 10q + \frac{1}{3}q^3$$

الحـل:

معدل تغير التكاليف بالنسبة للإنتاج هو:



$$\frac{dy}{dq} = 10 + q^2$$











تدريب (3)

مصنع ينتج أجهزة كهربائية، فإذا كان سعر بيع الجهاز الواحد يتوقف على عدد الأجهزة التي يطلبها العملاء من المصنع وذلك على أساس العلاقة الرياضية الآتية:

$$p = 1340 - 0.04q \qquad (1)$$

حيث: p : سعر الجهاز الواحد، q تشير إلى عدد الأجهزة.

المطلوب:

ما هو عدد الأجهزة الذي يتم بموجبه تسويقها بحيث يحقق المصنع أكبر ربح ممكن، علماً بأن التكاليف الكلية تعطى من العلاقة:

$$C = 0.06q^2 + 160q + 90000 \qquad (2)$$

أسئلة التقويم الذاتي (3)

الشركة الدولية تقوم بتسويق أجهزة كهربائية، فإذا كان سعر بيع الجهاز الواحد يتوقف على عدد الأجهزة التي يطلبها العملاء من الشركة وذلك على أساس العلاقة الرياضية الآتية:

$$p = 1400 - 0.03q \qquad (1)$$

حيث: p : سعر الجهاز الواحد، q تشير إلى عدد الأجهزة.

المطلوب:

ما هو عدد الأجهزة الذي يتم بموجبه تسويقها و تحقق الشركة أكبر ربح ممكن، علماً بأن التكاليف تعطى من العلاقة:

$$C = 0.09q^2 + 140q + 60000 \qquad (2)$$

$$(d) \quad f(x) = (2x - 3)^2$$

6. الخلاصة:

تناولت هذه الوحدة تطبيقات التفاضل، حيث اشتملت على النهايات العظمى والصغرى وبعض التطبيقات الاقتصادية لها في الحياة العملية، وسألخص لك أهم الموضوعات التي وردت في هذه الوحدة:

1. النهاية العظمى للدالة:

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a , b]$ فنقول أن للدالة عند: $x_1 \in]a , b[$ نهاية عظمى.

2. النهاية الصغرى للدالة:

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a , b]$ فنقول أن للدالة $x_2 \in]a , b[$ نهاية صغرى .

3. تزايد الدوال:

أ- إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق في الفترة $]a , b[$ وكانت $f'(x) \geq 0$ لكل $x \in]a , b[$ فإن: متزايدة في هذه الفترة

ب- إذا كانت الدالة $f'(x) > 0$ في الفترة $]a , b[$ فإن الدالة $f(x)$ تكون متزايدة في هذه الفترة.

4. تناقص الدوال:

أ- إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق في الفترة $]a , b[$ وكانت $f'(x) \leq 0$ لكل $x \in]a , b[$ فان: متناقصة في هذه الفترة

ب- إذا كانت الدالة $f'(x) < 0$ في الفترة $]a , b[$ فان الدالة $f(x)$ تكون متناقصة في هذه الفترة.

5 . تحدب منحنى الدالة:

لدراسة تحدب الدالة، نوجد المشتقة الثانية $f^{//}(x)$:

❖فإذا كانت المشتقة الثانية $f^{//}(x) < 0$ في منطقة ما فإن منحنى الدالة يكون محدباً إلى أعلى في هذه المنطقة.

❖ وإذا كانت المشتقة الثانية $f^{//}(x) > 0$ في منطقة ما فإن منحنى الدالة يكون محدباً إلى أسفل في هذه المنطقة.

6. نقط الانقلاب:

النقط التي تفصل بين مناطق التحدب إلى أعلى ومناطق التحدب إلى أسفل من منحنى تسمى نقط الانقلاب.

7. التطبيقات الاقتصادية للتفاضل:

تعرضنا للتطبيقات الاقتصادية للتفاضل، وركزنا في هذا الجانب على أسلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة في منشأة ما التي يحقق عندها المنتج أعلى ربح ممكن.

كما بينا العلاقة بين سعر السلعة والكمية المطلوبة منها، ورمزنا لهذه العلاقة بالرمز $\frac{dy}{dp}$ ، حيث تشير هذه العلاقة إلى معدل تغير الطلب بالنسبة إلى السعر. فإذا كان هذا المعدل سالباً فإن الزيادة في سعر هذه السلعة يؤدى إلى أن الكمية المطلوبة منها تقل، أما إذا كانت هذه العلاقة موجبة فإن الزيادة في سعر هذه السلعة يؤدى إلى زيادة الطلب عليها.

7. لمحة مسبقة عن الوحدة الثانية عشر

عزيـزي الـدارس، بعـد دراسـتك للوحـدة الحاديـة عشـرة (تطبيقـات التفاضـل)، أصبحت قـادراً علـى حسـاب النهايـات العظمـى والصـغرى للدالـة، والشروط التي تكون عندها للدالة نهاية عظمى أو صغرى.

وفي الوحـدة الثانيـة عشـرة سـنتطرق إلى التكـامـل (غـير المحـدود والمحـدود) وكيفية إيجاد تكامل الدالة باعتباره العملية العكسية للتفاضل.

ونظـراً لأهميـة هـذا الموضـوع، فـإن دراسـتك لهـذه الوحـدة تمكنـك **عزيـزي الـدارس**، مـن الإجابـة عـن كـثير مـن التسـاؤلات حـول التكـامـل غـير المحـدود والمحدود فعلى سبيل المثال، قد نرغب في إيجاد المساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ ومحـور السـينات x ، في هـذا الجانـب التكـامـل المحـدود يمكننـا مـن ذلك.

وسنتناول في هذه الوحدة تعريف التكامل غير المحدود والقوانين المرتبطة بـه، بالإضـافة إلى التكـامـل المحـدود وكيفيـة إيجـاد المسـاحة تحـت منحنـى الدالة $f(x)$ باستخدام هذا النوع من التكامل.

8. إجابات التدريبات:

تدريب(1)

$$(a) \because \quad f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 10$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 15$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 6x + 5) \Rightarrow 3(x-1)(x-5)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-18$$

$$\because \frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow 3(x-1)(x-5)=0$$

$$\therefore x=1 \quad , \quad x=5$$

وهذه هي النقط الحرجة للدالة

$$\because \frac{d^2y}{dx^2}(1)=6-18=-12<0$$

$\therefore x=1$ عندها نقطة قيمة عظمى للدالة.

$$\because \frac{d^2y}{dx^2}(5)=30-18=12>0$$

$\therefore x=5$ عندها نقطة قيمة صغرى للدالة.

ولإيجاد قيم نقط القيم العظمى والصغرى نعوض في الدالة الأصلية ، عن قيم

$x=1,5$

$$\text{(b)} \because f(x)=x(x-3)^2+2$$

$$=x(x^2-6x+9)+2$$

$$=x^3-6x^2+9x+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=3x^2-12x+9 \quad ,$$

$$\because \frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow 3(x^2-4x+3) \Rightarrow 3(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=1 \ , \ x=3$$

وهذه هي النقط الحرجة للدالة.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-12 \quad ,$$

$$\because \frac{d^2y}{dx^2}(1)=6-12=-6<0$$

$\therefore x=1$ عندها نقطة قيمة عظمى للدالة.

$$\because \frac{d^2y}{dx^2}(3) = 18-12 = 12 > 0$$

$\therefore x=3$ عندها نقطة قيمة صغرى للدالة.

ولإيجاد قيم نقط القيم العظمى والصغرى نعوض في الدالة الأصلية، عن قيم $x=1,3$

تدريب:2

السؤال الأول:

$$(a) \because f(x)=x^2-6x+7$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2x-6 \Rightarrow 2(x-3)$$

❖ **عندما:** $x < 3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = < 0$$

$\therefore$ **الدالة تناقصية في الفترة:**

$$]-\infty ,-3[$$

❖ **عندما:** $x > 3$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = > 0$$

$\therefore$ **الدالة تزايدية في الفترة:**

$$]3 \; , \; \infty[$$

$$(b) \because f(x)= 2x^3-9x^2-24x+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}= 6x^2-18x-24$$

$$=6(x^2-3x-4) \Rightarrow 6(x+1)(x-4)$$

❖ **عندما:** $x > 4$ أو $x < -1$

$\therefore$ **الدالة تزايدية في كل من الفترتين:**

$]-\infty \ , \ -1[\quad ,$

$]4 \ , \ \infty[$

❖ عندما: $-1 < x < 4$

∴ الدالة تناقصية في الفترة:

$]-1 \, , \, 4[$

السؤال الثاني:

$(a) \because f(x) = x^3 - 3x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x \quad ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6 \quad \Rightarrow 6(x-1)$$

❖ عندما: $x = 1$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

❖ وعندما: $x < 1$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

∴ منحنى الدالة محدب إلى أعلى عندما $x < 1$ ، أي في المنطقة $]-\infty \, ,1[$

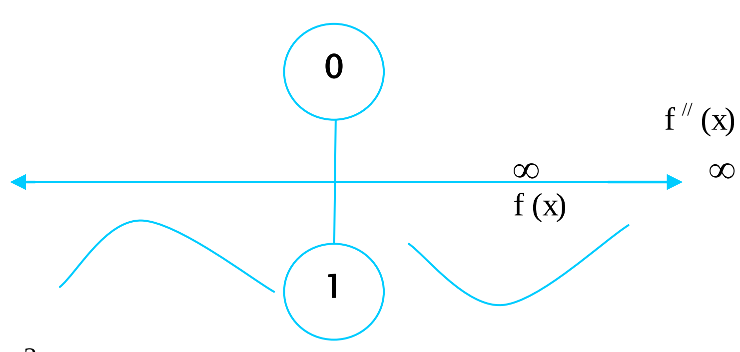
❖ وعندما: $x > 1$ تكون $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

∴ منحنى الدالة محدب إلى أسفل عندما: $x > 1$ ، أي في المنطقة $]1 \, , \, \infty[$

∵ منحنى الدالة يتغير تحدبه قبل وبعد: $x = 1$

∴ عند $x = 1$ توجد نقطة انقلاب هي:

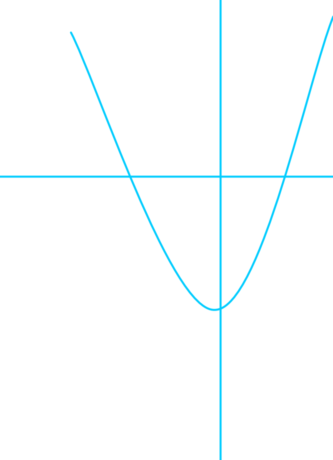
$$f(1) = 1 - 3 = -2 \quad \Rightarrow \quad (1 \ , \ -2)$$



(b) $\because f(x) = x^2 - 2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x \quad , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 > 0$$

$$\because \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$



∴ منحنى الدالة محدب إلى أسفل دائماً.

∵ أن منحنى الدالة لا يغير تحدبه عند أي نقطة.

∴ لا توجد نقطة انقلاب لهذا المنحنى.

تدريب:3

بفرض أن: الإيراد الكلي TR من تسويق عدد q من أجهزة الحاسوب.

$$\therefore TR = p \times q \qquad (1)$$

وبالتعويض عن p من العلاقة من التطبيق (1)-في العلاقة (3) نحصل على ما يأتي:

$$TR = q\ (1340 - 0.04q) = 1340q - 0.04q^2$$

$$TR = -0.04q^2 + 1340q$$

وعليه فإن الربح يعطى بالعلاقة الآتية:

$$R = TR - CR = (-0.04q^2 + 1340q) - (0.06q^2 + 160q + 90000)$$

$$R = -0.04q^2 + 1340q - 0.06q^2 - 160q - 90000$$

$$\therefore R = -0.10q^2 + 1180q - 90000$$

ولحساب أكبر أو أصغر قيمة للربح نحصل أولاً على المشتقة الأولى:

$$\frac{dR}{dq} = -0.20q + 1180 = -0.20q + 1180 \qquad (2) \quad ,$$

$$\frac{d^2R}{dq^2} = -0.20$$

ويكون الربح أكبر (أو أصغر) ما يمكن عندما: $\frac{dR}{dq} = 0$

∴ من العلاقة (2):

$$-0.20q + 1180 = 0 \Rightarrow -0.20q = -1180$$

$$\therefore q = \frac{-1180}{-0.20} = 5900 \text{ جهاز}$$

وعليه فإن الربح يكون أكبر ما يمكن عندما يكون عدد الأجهزة المباعة 5625 جهازاً ولمعرفة أكبر ربح تحققه الشركة يتم التعويض في العلاقة:

$$R = -0.10q^2 + 1180q - 90000$$

$$R = -0.10\ (5900)^2 + 1180\,(5900) - 90000$$

$$\therefore R = 3391000 \text{ ريال}$$

9. المراجع:

1. أبو بكر، عبدالله عبدالحليم (1994): الرياضة البحتة للعلوم التجارية، منشورات جامعة عين شمش، القاهرة: جمهورية مصر العربية.
2. أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
3. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
4. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
5. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.

10. التعيينات:

السؤال الأول:

أوجد نقط النهايات العظمى والصغرى للدوال الآتية:

(a) $f(x)=x^3-6x^2+9x+6$

(b) $f(x)=3x-x^3$

(C) $f(x)=8x^2-x^4$

(d) $f(x)=x^4-18x^2$

(e) $f(x)=x^4+1$

السؤال الثاني:

ابحث عن فترات التزايد والتناقص للدوال الآتية:

(a) $f(x)=(x+2)(x-1)^2$

(b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$

(C) $f(x)=x^3-3x^2+3x+7$

(d) $f(x)=x^2-4x+5$

السؤال الثالث:

أوجد مناطق التحدب إلى أعلى ومناطق التحدب إلى أسفل ونقط الانقلاب (إن وجدت) للدوال الآتية:

(a) $f(x)=x^3+x^2+2$

(b) $f(x)=x^4-24x^2+4$

(C) $f(x)=(x-1)^2(x-2)$

(d) $f(x)=(x^2-4)^2$

(e) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$

السؤال الرابع:

الشركة الوطنية لتصنيع الأجهزة الكهربائية، تقوم بتسويق الأجهزة المنتجة، فإذا كان سعر بيع الجهاز الواحد يتوقف على عدد الأجهزة التي يطلبها العملاء من الشركة وذلك على أساس العلاقة الرياضية الآتية:

$$p = 1500 - 0.02q$$

حيث: p : سعر الجهاز الواحد، q تشير إلى عدد الأجهزة.

المطلوب:

1- ما هو عدد الأجهزة الذي يتم بموجبه تسويقها و تحقق الشركة أكبر ربح ممكن، علماً بأن التكاليف تعطى من العلاقة:

$$C = 0.08q^2 + 140q + 50000$$

2- بفرض أن الشركة قد قامت بتسويق كل الأجهزة المنتجة، احسب أعلى ربح تحققه الشركة في هذه الحالة.

الوحدة الثانية عشرة 12

التكامل

محتويات الوحدة

1. المقدمة:

1.1. تمهيد:

عزيزي الدارس،

مرحباً بك إلى هذه الوحدة(التكامل) والتي تتألف من ثلاثة أقسام رئيسة ، حيث يزودك القسم الأول بمدى أهمية التكامل وبتعريف عام للتكامل.

ويتناول القسم الثاني التكامل غير المحدود ، من حيث التعريف والقوانين المختلفة لهذا النوع من التكامل متضمناً أمثلة توضيحية لتتمكن عزيزي الدارس، من استيعاب هذه القوانين المختلفة.

ويتناول القسم الثالث التكامل المحدود من حيث التعريف والعلاقة الرياضية لإيجاد مثل هذا النوع من التكامل. وحرصنا في الوقت ذاته على أن نقدم لك مادة تعليمية تشتمل أمثلة متنوعة وتدريبات وأسئلة تقويم ذاتي كفيلة بتلبية احتياجاتك التعليمية.

2.1. أهداف الوحدة:

عزيزي الدارس، مرحباً بك إلى دراسة الوحدة الدراسية الثانية عشر وهي بعنوان " التكامل " والذي يتوقع منك بعد دراسة هذه الوحدة أن تكون قادراً على أن:

1. تشرح أهمية التكامل.
2. تُعرّف التكامل.
3. تشرح التكامل غير المحدود.
4. تذكر قوانين التكامل غير المحدود.
5. تحسب التكامل غير المحدود.
6. تعرّف التكامل المحدود.
7. تحسب المساحة بين منحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات x .
8. توضح الفرق بين التكامل غير المحدود والتكامل المحدود.

1 -3. أقسام الوحدة:

عزيزي الدارس، ألفت انتباهك إلى أن هذه الوحدة تتكون من ثلاثة أقسام رئيسة أعدت لكي تحقق الأهداف الأساسية لهذه الوحدة، حيث ارتبط القسم الأول بالهدف الأول والثاني، والذي يركز على أهمية وتعريف التكامل .

وفي القسم الثاني تناولنا التكامل غير المحدود والقوانين المرتبطة به، متضمناً أمثلة توضيحية لتتمكن عزيزي الدارس من استيعاب وتطبيق هذه القوانين في الحياة العملية، وهذا يحقق الهدف الرابع والخامس.

وفي القسم الثالث تناولنا التكامل المحدود والعلاقة الرياضية التي تستخدم لإيجاد مثل هذا النوع من التكامل بالإضافة إلى شرح أسلوب إيجاد المساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$. وهذا يحقق الهدف السادس والسابع والثامن.

4.1. القراءات المساعدة:

1. أحمد، فاروق عبد العظيم وآخرون(1984): مقدمة في الرياضة البحتة للتجاريين، منشورات دار المطبوعات الجامعية، الإسكندرية: جمهورية مصر العربية.
2. الجاسر، إبراهيم عبدالله (2003): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعة الأولى، مكتبة الملك فهد الوطنية للنشر، الرياض: المملكة العربية السعودية
3. باروم، أحمد محمد وآخرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعة الخامسة، دار الشروق للنشر والتوزيع، جدة: المملكة العربية السعودية.
4. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
5. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.



5.1. الوسائط التعليمية المساعدة:

عزيزي الدارس، لكي تتحقق أهداف هذه الوحدة يجب عليك أن تقوم بالآتي:

- قراءة المادة العلمية واستيعابها استيعاباً جيداً وحل التدريبات التي وردت في هذه الوحدة وأسئلة التقويم الذاتي الخاص بها.
- عرض شرائح موضحاً عليها أجزاءً من المادة التعليمة.

6.1. ما تحتاج إليه لدراسة الوحدة:

عزيزي الدارس، نلفت انتباهك قبل دراسة هذه الوحدة إلى تأكدك من تهيئتك المكان الملائم للدراسة وأن يكون لديك دفتر وقلم.

وفي أثناء دراسة الوحدة حاول الإجابة عن جميع أسئلة التقويم الذاتي، حيث تساعدك في مراجعة مفردات الوحدة بالإضافة إلى التدريبات فهي تكسبك المهارات لتعلم المادة العلمية.

2. التكامل:

1.2. مقدمة:

يعد التكامل من المواضيع المهمة في الرياضيات ويحظى باستخدام واسع في كثير من فروع العلوم المختلفة. وقد درسنا في الوحدة العاشرة كيفية إيجاد تفاضل الدالة ، وفي هذه الوحدة سنتعرض إلى كيفية إيجاد تكامل الدالة باعتباره العملية العكسية للتفاضل.

1.1.2. تعريف:

إذا كانت الدالة $F'(x) = f(x)$ فان $F(x)$ هي معكوس المشتقة للدالة $f(x)$ في المجال $[a , b]$. وإذا كانت الدالة $F(x)$ هي معكوس المشتقة $f(x)$ ، فإن أي معكوس أخر للدالة $f(x)$ سوف يأخذ الصيغة:

$$F(x)+c$$

حيث: c مقدار ثابت.

وكما نعلم إذا كانت الدالة $f(x) = x^2$ فإن المشتقة الأولى للدالة هي $f'(x)=2x$. وحسب التعريف السابق تكون x^2 هي مشتقة عكسية أو دالة أصلية مقابلة للدالة $2x$ ، وبناءً عليه فإنه توجد مجموعة من الدوال تكون المشتقة الأولى لها هي $2x$. فعلى سبيل المثال فإن الدوال التالية لها نفس المشتقة الأولى:

$F(x)$ $F' = (x)$	$= f(x)$
$x^2 + 2$	$2x$
$x^2 - 3$	$2x$
$x^2 + \sqrt{3}$	$2x$
$x^2 + c$	$2x$

وهذا معناه أن المشتقة العكسية أو الدالة الأصلية المقابلة للدالة $2x$ ليست وحيدة، لذلك فإننا نعتبر أن المشتقة العكسية للدالة $2x$ هي $x^2 + c$ حيث c يسمى "ثابت التكامل". لذلك فإنه إذا كانت $F(x)$ هي معكوس التفاضل للدالة $f(x)$ ، فإن أي دالة بالصيغة $F(x)+c$ هي أيضاً معكوس التفاضل للدالة $f(x)$ ، حيث c مقدار ثابت.

تأمل الأمثلة الآتية:

$$(a)\ \int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$$

لأن:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + c) = 3x^2$$

$$(b)\ \int 4x^3\, dx = x^4 + c$$

لأن:

$$\frac{d}{dx}(x^4 + c) = 4x^3$$

$$(C)\ \int 15x^4\, dx = \int 3\times 5x^4 dx = 3\int 5x^4 dx = 3x^5 + c$$

لأن:

$$\frac{d}{dx}(3x^5 + c) = 15x^4$$

2.2. التكامل غير المحدود:

تسمى العملية العكسية للتفاضل بالتكامل، بمعنى إذا كانت الدالة $F(x)$ معكوس مشتقة الدالة $f(x)$ فإن الصيغة:

$$F(x) + c$$

تسمى بالتكامل غير المحدود ويرمز له بالرمز:

$$\int f(x)\, dx$$

وتقرأ الصيغة " $\int f(x)dx$ " تكامل $f(x)$ بالنسبة إلى x ، وتشير dx إلى أن التكامل بالنسبة للمتغير x ، ويسمى المقدار الثابت " c " بثابت التكامل.

1.2.2. قوانين التكامل غير المحدود:

1

إذا كانت a عدداً حقيقياً فإن:

$$\int a\ f(x)dx = a\int f(x)dx$$

فمثلاً:

$$(a)\ \int 5x\ dx = 5\int x\ dx\ ,$$

$$(b)\ \int \frac{1}{2}x\ dx = \frac{1}{2}\int x\,dx$$

وهذا يعني انه عند إجراء تكامل دالة مضروباً في عدد حقيقي، فإنه يتم وضع هذا العدد خارج رمز التكامل.

2

إذا كانت n عدداً حقيقياً، $n \neq -1$ فإن:

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

c : **مقدار ثابت.**

تعني هذه القاعدة أنه عند إيجاد المشتقة العكسية للدالة $f(x) = x^n$ ، فإننا نضيف واحد إلى الأس ثم نقسم على الأس الجديد الناتج.

فمثلاً:

$$(a)\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c \quad ,$$

$$(b)\int \frac{1}{y^4} dy = \int y^{-4} dy = \frac{y^{-3}}{-3} + c = -\frac{1}{3y^3} + c \quad ,$$

$$(c)\int x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2-1} + c = -x^{-1} + c = \frac{-1}{x} + c$$

نتيجة:

$$\int a x^n dx = a\int x^n dx = \frac{a x^{n+1}}{n+1} + c$$

حيث : n , a أعداد حقيقية، $n \neq -1$

c : مقدار ثابت.

فمثلاً:

$$(a)\int 3x^5 dx = \frac{3x^6}{6} + c = \frac{1}{2} x^6 + c \quad ,$$

$$(b)\int \frac{3}{2x^2} dx = \int \frac{3}{2} x^{-2} dx = \frac{3}{2} \times \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= -\frac{3}{2x} + c$$

من القاعدة رقم (2) والنتيجة السابقة نستنتج أن:

$$\int dx = x + c \quad , \quad \int a\, dx = a x + c$$

أي أن تكامل العنصر التفاضلي dx هو x مضافاً إليه المقدار الثابت c.

فمثلاً:

$$\int dx = \int 1\, dx = \int x^0\, dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c \quad ,$$

$$\int a\, dx = \int a\, x^0 dx = a\frac{x^{0+1}}{0+1} + c = a\, x + c$$

وعلى ذلك فإن:

$$\int dy = y + c \quad , \quad \int 2\, dx = 2x + c$$

3

إذا كانت $f(x)$, $g(x)$ **دالتين في** x **فإن:**

$$\int [\, f(x) \pm g(x)\,]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

أي أن تكامل حاصل جمع (أو الفرق بين) دالتين يساوي مجموع (أو الفرق بين) تكامل هاتين الدالتين.

فمثلاً:

$$\int (x^2 + 6)\, dx = \int x^2 dx + \int 6\, dx = \frac{x^3}{3} + 6x + c \quad ,$$

$$\int (x^3 + x^4)\, dx = \int x^3 dx + \int x^4\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + c \quad ,$$

$$\int (2x^2 - 5x + 3)\, dx = 2\int x^2 dx - 5\int x\, dx + 3\int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + c$$

إذا كانت n , b , a أعداد حقيقية ، $n \neq -1$ فان:

4

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$ □

c : مقدار ثابت.

فمثلاً:

$$\int (2x+5)^3 \, dx = \frac{(2x+5)^4}{2(4)} + c = \frac{1}{8}(2x+5)^4 + c \quad ,$$

$$\int (3-5x)^6 dx = \frac{(3-5x)^7}{-5(7)} + c = -\frac{1}{35}(3-5x)^7 + c \quad ,$$

$$\int \frac{8}{(3-2x)^5} dx = \int 8\,(3-2x)^{-5} \, dx = \frac{8\,(3-2x)^{-4}}{-2(-4)} + c$$

$$= \frac{8(3-2x)^{-4}}{8} + c = \frac{1}{(3-2x)^4} + c$$

يلاحظ أنه تم:

- ❖ اختصار الرقم 8 في كل من البسط والمقام.
- ❖ نقل البسط إلى المقام وذلك للتخلص من إشارة الأس السالبة.

5

$$\int e^x dx = e^x + c \quad ,$$

$$\int e^{kx} dx = \frac{1}{K} e^{kx} + c$$ □

c : مقدار ثابت.

أي أن تكامل الدالة الأسية هي نفسها الدالة الأسية مضافاً إليه ثابت التكامل.

وإذا كان الأس مضروباً بثابت فإنه يتم القسمة على الثابت.

فمثلاً:

$$\int 4e^{x}dx = 4e^{x} + c \quad ,$$

$$\int (x^{3} + e^{x})\,dx = \frac{x^{4}}{4} + e^{x} + c \quad ,$$

$$\int (x^{2} + 2e^{x})\,dx = \frac{x^{3}}{3} + 2e^{x} + c \quad ,$$

$$\int (e^{4x} + 3x)\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{3x^{2}}{2} + c$$

تدريب (1)



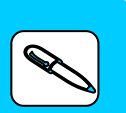
أوجد التكاملات الآتية:

(a) $\int dx$ (b) $\int -3dx$ (C) $\int x\,dx$

(d) $\int y^{4}dy$ (e) $\int \sqrt{2}\,dx$

تدريب (2)





أوجد التكاملات الآتية:

(a) $\int (x+1)dx$ (b) $\int (3x^{2}+2x-5)dx$ (C) $\int x^{2}(4x+3)\,dx$

(d) $\int (x-2)\,(4x^{2}+1)\,dx$ (e) $\int (4x-3)^{5}dx$ (f) $\int 16\,(3-2x)^{-7}$

(g) $\int (e^{3x}+6)\,dx$

أسئلة التقويم الذاتي

?

أوجد التكاملات الآتية:

(a) $\int x^3(2x-2x)^2\,dx$ (b) $\int (\sqrt{2}\;\; y)\,dy$ (C) $\int \frac{1}{5x^2}\,dx$

(d) $\int 4(0.5x-1)^7 dx$ (e) $\int (2x^3+4x)\,dx$ (f) $\int x(2x-3)^2\,dx$

(g) $\int x^{1/3}dx$ (h) $\int \frac{3}{2x^2}dx$ (i) $\int x\sqrt{x}\,dx$

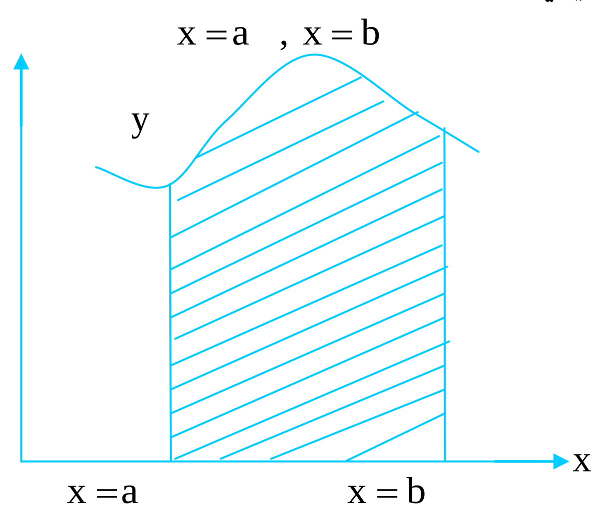
(j) $\int \sqrt{y}\,dy$ (k) $\int (e^{-2X}+3x^2)\,dx$ (L) $\int 4\,dy$

3.2. التكامل المحدود:

يعد التكامل المحدود من الأدوات الرياضية المهمة في حل كثير من المسائل التطبيقية، ويستخدم هذا المفهوم في حساب المساحات تحت منحنيات الدوال وأطوال أقواس هذه المنحنيات كما يستخدم في حساب المؤشرات المختلفة لبعض المتغيرات الإحصائية وغيرها كثير. وسنحاول هنا التعرف على مفهوم التكامل المحدود كمساحات تحت منحنى الدالة.

لنفترض أن لدينا دالة $f(x)$ مستمرة في الفترة $[a\ ,\ b]$ وتمثل بمنحنى الدالة كما في الشكل التالي ونرغب في حساب المساحة المحصورة بين منحنى هذه الدالة ومحور السينات والمستقيمين:

$x=a \quad , \ x=b$



ولحساب قيمة التكامل المحدود المساحة المطلوبة فإننا نحتاج إلى حساب التكامل للدالة بين النقطتين b , a ويقال أن التكامل المحدود للدالة $f(x)$ بالنسبة إلى x في الفترة $x=b$, $a=x$ ويرمز له بالرمز:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ويتم إيجاد تكامل الدالة السابقة باستخدام العلاقة الآتية:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_b^a = F(b)-F(a)$$

مثال1:

أوجد قيمة التكامل:

$$\int_0^2 (x^2+2)\,dx$$

الحل:

نوجد أولاً قيمة التكامل غير المحدود وذلك بدون كتابة ثابت التكامل.

$$\int (x^2+2)\,dx = \frac{x^3}{3}+2x$$

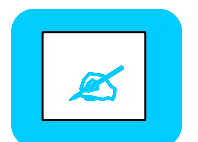
❖ يتم التعويض بحدود التكامل على الوجه الأتي:

$$\int_0^2 (x^2+x)\,dx = \frac{x^3}{3}+2x\Big|_0^2$$

$$= \frac{(2)^3}{3}+2(2)-0 = \frac{8}{3}+4 = \frac{8+12}{3} \quad \square$$

$$= \frac{20}{3}$$

❖ تم توحيد المقامات.



مثال 2:

اوجد المساحة المحصورة بين المنحنى: $y = \frac{x^3}{4} - 2x + 3$ ومحور السينات

x في الفترة بين: $x = 1 , 3$

الحـل:

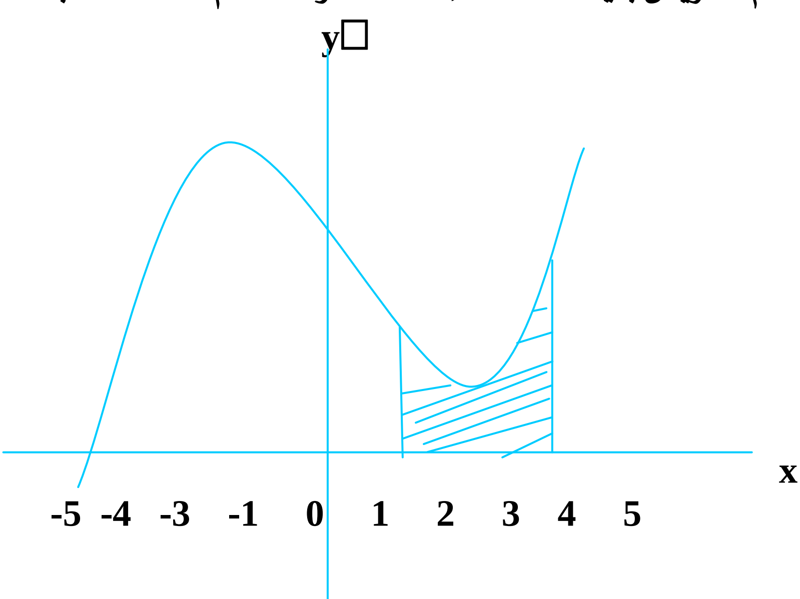
لحساب المساحة نوجد التكامل المحدود كما يأتي.

$$\int_1^3 \left(x^3/4 - 2x + 3 \right) dx$$

$$= \frac{x^4}{16} - x^2 + 3x \Big|_1^3$$

$$= \left[\frac{81}{16} - 9 + 9 \right] - \left[\frac{1}{16} - 1 + 3 \right] = 3$$

❖ تم التعويض بقيمة $(x = 3 \ , \ x = 1)$ واستخدام العلاقة السابقة.



مثال 3:

اوجد المساحة المحصورة بين المنحنى: $y = 3x^2 - 6x$ ومحور السينات.

الحل:

يتم حساب المساحة باستخدام التكامل المحدود وذلك بتحديد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات، وذلك بمساواة معادلة المنحنى بالصفر وكما يأتي:

☐

$$\because y = 3x^2 - 6x = 0$$

$$\therefore 3x(x-2) = 0 \rightarrow 3x = 0 \qquad \therefore x = 0 \quad ,$$

$$x - 2 = 0 \qquad \therefore x = 2$$

وبناءً عليه تكون المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 3x^2 - 6x$ ومحور السينات x في الفترة بين: $x = 0 \ , \ 2$ هي:

$$\int_0^2 \left(3x^2 - 6x\right) dx$$

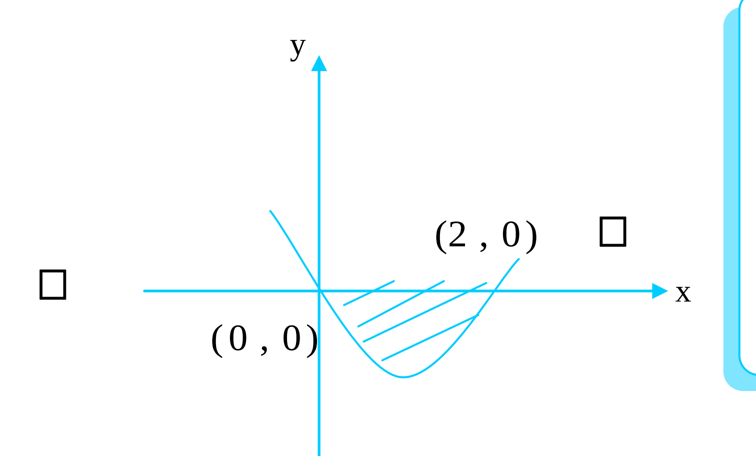
$$= \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \Big|_0^2$$

$$= x^3 - 3x^2 \ \Big|_0^2$$

$$= (2^3 - 3(2^2)) = 8 - 12 = -4$$

$\because$ المساحة لا يمكن أن تكون قيمة سالبة.

$\therefore$ المساحة تساوي 4 وحدات مربعة، ويمكن توضيح ذلك في الشكل التالي:



ملاحظة هامة:

❖المساحات هي القيمة المطلقة لقيمة التكامل المحدود، وتكون موجبة باستمرار.

❖القيمة المطلقة لعدد ما هي قيمة العدد بغض النظر عن الإشارة.

تدريب (3)

السؤال الأول:

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

(a) $\int_{1}^{3}(x+3)\,dx$ (b) $\int_{0}^{4}(8x-2x^2)\,dx$

(c) $\int_{-2}^{4}\left(2+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}y^2\right)dy$

(d) $\int_{1}^{2}3x(x^2-1)\,dx$

السؤال الثاني:

ما هي المساحة تحت المنحنى: $y=4x^3$ في الفترة، $x=0\ ,\ 3$

السؤال الثالث:

ما هي المساحة تحت المنحنى: $y=2x-x^2$

أسئلة التقويم الذاتي

السؤال الأول:

احسب قيمة التكاملات الآتية:

$$(a)\ \int_{1}^{2} (3x^2 + 2x + 5)\,dx \qquad (b)\ \int_{1}^{3} (x+1)^2\,dx \qquad (c)\ \int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\,dx$$

؟

السؤال الثاني:

أوجد المساحة تحت منحنى الدالة:

$$y = x^2 - 2x - 3 = 0$$

السؤال الثالث:

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات في كل حالة من الحالات الآتية:

$$(a)\ y = x^2 \ ,\ \ x = 0\ ,\ 2 \qquad (b)\ y = x^3 - 4x$$

3. الخلاصة:

ركزت هذه الوحدة على أهمية التكامل وتعريفه، حيث يعتبر التكامل من المواضيع المهمة في الرياضيات ويحظى باستخدام واسع في كثير من فروع العلوم المختلفة. ويعرف التكامل بأنه عبارة عن العملية العكسية للتفاضل.

كما تناولت الوحدة التكامل غير المحدود، ورمزنا للصيغة العامة لمثل هذا النوع من التكامل بالرمز:

$$\int f(x)\,dx$$

وتناولت الوحدة أيضاً القوانين المختلفة للتكامل غير المحدود، وتم تعزيز ذلك بأمثلة توضيحية ليتمكن الدارس من استيعاب وتطبيق هذه القوانين.
كما استعرضنا في هذه الوحدة التكامل المحدود والصيغة الرياضية المستخدمة لحساب مثل هذا النوع من التكامل هي:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

وتضمنت الوحدة أيضاً أمثلة توضيحية بينا فيها كيفية حساب المساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ ومحور السينات x. وتكون المساحة في هذه الحالة بالوحدات المربعة الموجبة.

4. إجـــابات التدريبـــات

التكامل غير المحدود:

تدريب**1**:

$(a)\ \int dx = x + c$, $(b)\ \int -3\,dx = -3x + c$

$(C)\ \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + c$, $(d)\ \int y^4 dy = \frac{1}{5}y^5 + c$

$(e)\ \int \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2x} + c$

تدريب**2**:

$(a)\ \int (x+1)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + x + c$,

$(b)\ \int (3x^2 + 2x - 5)\,dx = x^3 + x^2 - 5x + c$

$$(C)\ \int x^2(4x+3)\,dx = \int (4x^3 + 3x^2)\,dx$$
$$= x^4 + x^3 + c$$

❖ يلاحظ أنه تم ضرب القوس في " x^2 " ومن ثم إيجاد قيمة التكامل.

$$(d)\ \int (x-2)(4x^2+1)\,dx = \int (4x^3 - 8x^2 + x - 2)\,dx$$

$$\therefore \int (4x^3 - 8x^2 + x - 2)\,dx = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$$

❖ تم ضرب القوس الأول في القوس الثاني ومن ثم إيجاد قيمة التكامل.

$$(e)\ \int (4x-3)^5 dx = \frac{(4x-3)^6}{4(6)} + c = \frac{1}{24}(4x-3)^6 + c$$

$$(f)\ \int 16(3-2x)^{-7} dx = \frac{16(3-2x)^{-6}}{-2(-6)} + c = \frac{4}{3(3-2x)^6} + c$$

$$(g)\ \int e^{3X} + 6)\, dx = \frac{1}{3} e^{3X} + 6x + c$$

التكامل المحدود:

تدريب3:

السؤال الأول:

$$(a) \int_1^3 (x+3)\, dx = x^2/2 + 3x \Big|_1^3 = [3^2/2 + 3(3)] - [1^2/2 + 3(1)]$$

$$= (27/2) - (7/2) = 10$$

$$(b) \int_0^4 (8x - 2x^2)\, dx = 4x^2 - \tfrac{2}{3}x^3 \Big|_0^4$$

$$= [4(4)^2 - \tfrac{2}{3}(4)^3] - [0] = \frac{64}{3}$$

$$(c) \int_{-2}^4 (2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{4}y^2)\, dy = 2y + y^2/4 - y^3/12 \Big|_{-2}^4 = 9$$

$$(d)\int_1^2 3x(x^2-1)\,dx=\int_1^2 (3x^3-3x)\,dx$$

$$=3x^4/4-3x^2/2\Big|_1^2$$

$$=[3(2)^4/4-3(2)^2/2]-[3\times1/4-3(1)/2]=\frac{27}{4}$$

السؤال الثاني:

لحساب المساحة، يتم إيجاد التكامل المحدود كما يأتي:

$$\int_0^3 4x^3dx=4x^4/4\Big|_0^3=x^4\Big|_0^3$$

$$=(3)^4-(0)=81$$ **وحدة مربعة.**

السؤال الثالث:

لحساب المساحة، نحسب نقط تقاطع المنحنى $y=2x-x^2$ **مع محـور السينات**

x

وذلك بمساواة منحنى الدالة تساوي صفراً.

$$\because y=2x-x^2=0 \quad \therefore x(2-x)=0 \rightarrow x=0 \quad , \quad \square$$

$$2-x=0 \rightarrow x=2$$

$$\int_0^2 (2x-x^2)\,dx=2x^2/2-x^3/3\Big|_0^2 = x^2-x^3/3\Big|_0^2$$

$$=(2)^2-(2)^3/3\square$$

$$=4-8/3=\frac{4}{3}$$ **وحدة مربعة.**

5. المراجـع:

1. أحمد ، فاروق عبد العظيم وآخـرون(1984): مقدمـة في الرياضـة البحتة للتجاريين، منشـورات دار المطبوعـات الجامعيـة ، الإسـكندرية: جمهوريـة مصر العربية.
2. الجاسر، إبراهيم عبدالله (2003): مقدمـة في الرياضيات للعلوم الإدارية والاجتماعية، الطبعـة الأولى، مكتبـة الملك فهد الوطنيـة للنشـر، الريـاض: المملكة العربية السعودية
3. باروم، أحمد محمد وآخـرون (1988): الرياضيات في الاقتصاد والإدارة، الطبعـة الخامسـة، دار الشـروق للنشـر والتوزيـع، جـدة: المملكـة العربيـة السعودية.
4. متولي، مختار محمد. (1993): الأساليب الرياضية للاقتصاديين، الطبعـة الأولى، منشورات جامعة الملك سعود، الرياض: المملكة العربية السعودية.
5. مصطفى، أحمد فتحي وآخرون . (2002): مقدمـة في الرياضيات للعلـوم الإدارية، الطبعة الأولى، منشـورات جامعـة الملك سـعود، الريـاض: المملكـة العربية السعودية.

6. التعيينـــات:

السؤال الأول:

أوجد قيمة ما يأتي:

(a) $\int x(2x+1)^2\,dx$

(b) $\int (x^2+6x\sqrt{x}\,)$

(c) $\int (8x^{-3}+4x^{-1})\,dx$

(d) $\int \frac{4}{x}\,dx$

(e) $\int \frac{1+2x^3}{x}\,dx$

(f) $\int \frac{\sqrt{x}+x^3}{x}\,dx$

(g) $\int (3x^2-5)\;2x\,dx$

(h) $\int \frac{3x}{\sqrt{x-2}}$

السؤال الثاني:

أوجد قيمة:

(a) $\int \frac{y}{1+y^2}\,dy$

(b) $\int \frac{1}{y^2}\,dy$

(c) $\int 4x\,(3x^2+1)\,dx$

(d) $\int (x^2+2)\,dx$

السؤال الثالث:

احسب قيمة ما يأتي:

(a) $\int_{-1}^{4} (3x^2-3x)\,dx$

(b) $\int_{1}^{7} \frac{3}{(x-4)}\,dx$

(c) $\int_{0}^{2} (\sqrt{2x^2+3}\,dx$

(d) $\int_{-1}^{4} (x^2+1)^2\,dx$

(e) $\int_{0}^{2} \frac{x}{x^2+2}\,dx$ □

□

□

□

□

السؤال الرابع:

أوجد المساحة المحصورة بين منحنى الدالة:

- $y = x^2 - 6x - 5$ **ومحور السينات** x .
- $y = x^3 - 4x$ **ومحور السينات** x .



UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY

١٩٩٤م ١٤١٤هـ

وقل رب زدني علماً

جامعة العلوم والتكنولوجيا

يطلب هذا الكتاب مباشرة من مركز جامعة العلوم والتكنولوجيا للكتاب الجامعي



Web Site:www.ust.edu/centers/ubc - Email: ubc@ust.edu - Tel: 00971 384078